

доц. д-р Р. Йорданов

Контрол на качеството



Учебни записки
София 2014

Съдържание:

1. Квалиметрия	3
1.1. Показатели на качеството	4
1.2. Методи за оценка на качеството	7
2. Методи за контрол на качеството	14
3. Методи за измерване и оценка на точността.....	16
4. Правила за доказване на съответствието	22
5. Статистически методи за контрол на качеството	24
5.1. Основни понятия в статистиката	24
5.2. Проверка на статистически хипотези	30
5.3. Оценка на възможностите на процеси	35
5.4. Статистически контрол на процеси	40
5.5. Приемателен статистически контрол	59
5.6. Обработка на данни с негаусово разпределение	76
6. Дисперсионен, корелационен и регресионен анализ	79
7. Основи на планирането на експеримента	87
8. Упражнения	108
 Въпроси за самоподготовка	 132
Приложения	134
Литература	145

1. КВАЛИМЕТРИЯ

В основата на всяка форма на управление лежи достоверната изходна информация за съответните дейности и обекти. Такава информация може да се набави чрез контрол и измерване на величини, параметри и показатели. Не може да се говори за управление на качеството без неговото измерване и оценяване.

Измерването и свързаните с него дейности са предмет на науката метрология.

Квалиметрията е раздел от метрологията, който изучава и реализира методите за оценка на качеството.



фиг.1

Общата квалиметрия се занимава с разработването на общитеоретичните проблеми – понятия и термини, теория на оценяването – методи, правила, аксиоми.

Специалната квалиметрия разглежда моделите и алгоритмите за оценяване, точността и достоверността на оценките.

Предметната квалиметрия се занимава с оценката на обекти – продукция, процеси, дейности, проекти, информация и др.

Квалиметрията решава следните основни практически задачи:

- Определяне на номенклатурата и числените стойности на показателите на качеството за включването им в съответната нормативна документация с цел последващ контрол.
- Измерване, контрол, оценяване и изпитване на качеството.

Измерване на качеството е определяне на стойността на съответния показател на качеството.

Контролът е сравняване на стойностите на показателите на качеството с нормираните стойности.

Оценяване на качеството е сравняване на стойностите на показателите на качеството на оценявания обект с базови стойности.

Изпитването е процес на определяне на една или повече характеристики на обекта съгласно определена процедура.

1.1. Показатели на качеството

Показател на качеството е количествена характеристика на свойство на обекта, влизащо в състава на неговото качество. Показателите на качеството отразяват обществената потребност в конкретни условия.

При измерване на качеството показателите на качеството могат да се разглеждат като аналози на физичните величини. И двете отразяват количествената страна на свойствата на обектите. Двете понятия са близки но не са тъждествени. Докато физичната величина отразява обективно свойство в природата, показателят на качеството – обществената потребност в конкретни условия. Например масата е физична величина, а масата на изделието – показател за неговата транспортнопригодност, осветеност е физична величина, а осветеност на работното място – ергономичен показател и т.н.

Показателите на качеството биват:

- Единичен показател - отнася се само до едно от свойствата на обекта.
- Комплексен показател - отнася се едновременно до няколко свойства на обекта.

Препоръчва се когато е възможно комплексните показатели да бъдат свързани с единичните с функционални зависимости. В случаите когато изразяването на комплексния показател чрез единичните с помощта на обективна функционална зависимост е затруднено, се използва субективен начин за образуване на комплексния показател посредством т.н. средни претеглени стойности на показателите. Стойностите на средните претеглени се определят чрез усредняване на съвкупността от единични показатели q_i с коефициенти на значимост g_i . Пресмятането се извършва по формулите:

- средноаритметично претеглено

$$Q = \sum_{i=1}^n g_i q_i$$

- средноквадратично претеглено

$$Q = \sqrt{\sum_{i=1}^n g_i^2 q_i^2}$$

- средногеометрично претеглено

$$Q = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n g_i^{q_i}}$$

Средноаритметичното и средноквадратичното претеглено се използват когато комплексният показател обединява еднородни единични показатели. При нееднородни единични показатели на качеството най-често се използва средногеометричното претеглено.

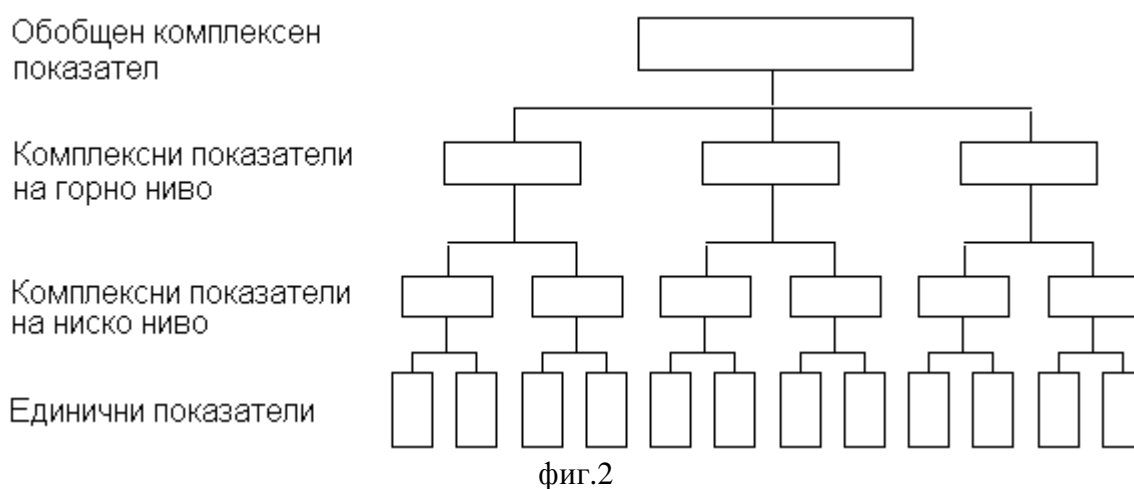
С помощта на коефициента на значимост g_i се отчита важността на всеки единичен показател на качеството. Обаче определянето на g_i (т.е. с колко или колко пъти един показател е по-важен от друг) е сложна задача, която най-често се решава чрез експертен метод и при изпълнение на условието $\sum g_i = 1$.

Сумирането на единичните показатели на качеството с отчитане на тяхната значимост следва да се извършва при съблюдаване на правилата на теорията за размерност. Ето защо най-често предварително се преминава от абсолютни към относителни стойности на

единичните показатели на качеството и получената стойност на комплексния показател е безразмерна величина.

При така определените комплексни показатели ниските стойности на едни единични показатели могат да се компенсират с високи стойности на други. Например за продукти като дрехи, ниските стойности на показателя за дълготрайност могат да бъдат компенсирани от високи стойности на естетически показатели. В същото време е недопустимо да се компенсират ниски стойности на главни (важни) показатели с високи стойности на второстепенни показатели. За изключване на такава възможност комплексният показател се умножава с т.н. коефициент "вето", който има стойност нула при излизане на който и да е от важните единични показатели извън определени граници и е равен на 1 при всички останали случаи. Благодарение на това стойността на комплексния показател става нула, ако стойността дори и на един от важните единични показатели е неприемлива.

- **Обобщен показател** – отнася се към такава съвкупност от свойства на обекта, за която е прието да се оценява качеството като цяло.



- **Групов показател.** Комплексните показатели на качеството, които се отнасят за определена група свойства се наричат *групови*.

- **Интегрален показател** - определен чрез отношението на сумарния полезен ефект от експлоатацията и потреблението на продукта към сумарните разходи за неговото създаване и експлоатация. Позволява да се определи съвкупността от свойства от икономическа гледна точка.

$$J = \frac{\Pi_{\Sigma}}{P_c + P_e},$$

където Π_{Σ} е полезният годишен ефект от експлоатацията на продукта, P_c – сумарни разходи за създаване на продукта, P_e – сумарни експлоатационни разходи за една година.

- **Критичен показател (ограничителен показател)** – особена група показатели, които определят изискванията на директивите на ЕС в регулираната област.

Делят се на две групи: изисквания за безопасност и изисквания, свързани с опазване на околната среда.

При оценка на равнището на качеството на продуктите може да се използва и съвкупност от единични и комплексни (групови) показатели. Такъв подход е подходящ в случаите когато с комплексният показател не може напълно да се отчетат всички съществени свойства на продукта, както и когато броят на единичните показатели е много голям и анализът им затруднява получаването на обобщени изводи за качеството. Част от единичните показатели се обединяват в групи и се определят груповите показатели, а отделни важни показатели се използват като единични.

Номенклатура на показателите на качеството

Съвкупността от показатели на качеството, групирани по характерни свойства на продукта, определя *номенклатурата на показателите* на качеството. Например за промишлени продукти номенклатурата може да включва следните групи показатели:

- показатели на предназначението – характеризират свойствата на продуктите, определящи основните функции, за които те са предназначени. За оценяване на техническото равнище и качеството на продуктите следва да се отчитат: целта на извършваното оценяване, предназначението на продуктите, условията на предполагаемото използване.

- показатели на надеждност

Надеждността е свойство на изделието да запазва във времето в установени граници стойностите на всички параметри, характеризиращи способността за изпълнение на необходимите функции в зададени режими и условия на използване, техническо обслужване, ремонт, съхранение и транспорт. Надеждността е сложно свойство, което се състои от съчетание на такива свойства като безотказност, дълготрайност, ремонтпригодност и съхраняемост.

Безотказност е свойство на изделието да запазва работоспособността си в течение на определено време. Показатели за безотказност могат да бъдат: вероятността за безотказна работа, средната отработка до отказ.

Дълготрайност е свойство на изделието да запазва своята работоспособност до настъпване на гранично състояние при установена система за техническо обслужване и ремонт. Показател за дълготрайност може да бъде експлоатационния срок.

Ремонтпригодност е свойство на изделието, състоящо се в неговата приспособеност към предупреждаване, откриване на причините за откази и повреди и отстраняването им чрез ремонт. Показател за ремонтпригодност може да бъде средното време за възстановяване.

Съхраняемост е свойство на продукта непрекъснато да съхранява до използване или експлоатация зададените характеристики в установени граници при зададени условия в течение на определен период от време. Показател за съхраняемост може да бъде средният срок на съхранение.

Комплексният показател на надеждността включва поне два единични показателя. Например такъв показател може да бъде коефициентът на готовност

$$k_z = \frac{T_0}{T_0 + T_B},$$

където T_0 е отработка до отказ, T_B – средно време за възстановяване до работоспособно състояние.

- показатели на технологичност – характеризират ефективността на конструкторско-технологични решения при производството и експлоатация на продукта. Основни показатели на технологичност могат да бъдат трудоемкост, металоемкост, коефициента на използване на материала – отношението на масата на материалите в готовия продукт към масата на вложените в технологичния процес материали ($k_{им} = M_f / M_B$).

- показатели на транспортпригодност

- ергономични показатели – характеризират системата “човек – продукт – среда на използване” и отчитат изискванията, предявявани към продукта за повишаване на ефективността на взаимодействието на човека с продукта. Към ергономичните показатели се отнасят хигиенни, физиологични, психологически и др. показатели.

- естетически показатели – характеризират информационната изразителност, рационалността на формата, целостта на композицията, съвършенство на производственото изпълнение.

Информационната изразителност се определя от оригиналността на външния вид на продукта, стиловото му единство с околната среда, съответствието с модните тенденции и др.

Рационалността на формата се определя главно чрез нейното съответствие с предназначението на продукта.

Целостта на композицията се определя от съгласуваността на формите, съчетанията на цветовете, декоративните свойства на материалите.

Съвършенството на производственото изпълнение се определя от качеството на обработка на повърхнините, яснотата на изпълнение на фирмените знаци и други надписи, съпровождащата документация и др.

- показатели на безопасност – характеризират безопасността на обслужващия персонал и свързаните с продукта обекти при неговото функциониране.

- екологични показатели – характеризират равнището на вредни въздействия върху околната среда.

- патентно-правни показатели – характеризират научната новост и патентна защита на техническите решения.

- показатели за стандартизация и унификация – характеризират степента на използване в продукта на стандартни съставни части. Такива показатели могат да бъдат коефициента на повтораемост на съставните части в продукта:

$$k_n = \frac{N - n}{N} \cdot 100, \text{ където } N \text{ е общият брой съставни части, а } n - \text{повтарящите се}$$

съставни части.

коефициент на приложимост:

$$k_{np} = \frac{n - n_o}{n}, \text{ където } n \text{ е общото количество типоразмери на продукта, а } n_o -$$

количеството типоразмери на оригиналните съставни части.

- икономически показатели – характеризират разходите за разработване, изработване и експлоатация.

- показатели на еднородност – характеризират разсейването на параметрите на продукти от даден вид.

Показателите на качеството могат да бъдат групирани и по други начини. Например Джуран и Грина предлагат следните групи показатели на качеството:

- геометрични, физични, механични и химични характеристики и свойства на изделията (форма, твърдост, размери, състав)

- показатели на външния вид (цвят, мирис, красота)

- показатели на употреба (здравина, надеждност)

- търговски показатели (цена, опаковка, транспортируемост и съхранение)

- показатели на удовлетвореност от притежанието (мода, уникалност).

1.2. Методи за оценка на качеството

Оценяване на качеството е сравняване на стойностите на показателите на качеството на оценявания обект с базови стойности. С оценката на качеството може систематично да се изследва степента, в която даден продукт или процес е способен да задоволява определени потребности.

Методите за оценка на качеството биват:

- Инструментален
- Регистрационен
- Разчетен
- Експертен
- Органолептичен
- Социологически

Инструменталният метод се базира на използването на технически средства за определяне стойностите на показателите на качеството. Той осигурява най-висока точност и обективност и дава най-добри възможности за механизация и автоматизация. Поради това следва да се използва винаги, когато това е възможно и икономически оправдано.

Регистрационният метод се базира на използване на информация, получена чрез преброяване на събития, предмети или разходи (загуби).

Разчетният метод позволява чрез използване на теоретични и емпирични зависимости да се пресметнат стойностите на показателите на качеството. Използва се най-често на етапа на проектиране, когато експеримент все още не може да бъде проведен.

Експертният метод се базира на мненията на група специалисти експерти. Те определят показателите на качеството на основата на своя опит и информираност. Този метод намира приложение при определяне на номенклатурата на показателите на качеството, коефициентите на значимост, ергономичните и естетични показатели и в случаите, когато използването на по-обективни методи е невъзможно или икономически неизгодно.

При експертното оценяване на продукти, на базата на задълбочен анализ се определя потребителската им ценност – социалната ефективност, полезност, удобство за използване, естетическо съвършенство.

Човешкият мозък, за разлика от машината, е приспособен да решава разнообразни задачи в условия на неопределеност (т.е. на недостатъчна и неточна информация). Но независимо от това експертните методи следва да се прилагат само когато използването на по-обективни методи е невъзможно или икономически неоправдано. Както всички други методи и експертните имат своите предимства и недостатъци.

Основно предимство на експертните методи е, че те позволяват да се вземат решения, когато по-обективни методи са неприемливи. Експертните методи, прилагани от квалифицирани специалисти (експерти) позволяват да се направи точна оценка на качеството на продукта. Експериментално е установено, че при правилен избор на методиката за експертно оценяване се получават резултати, близки до тези, получени с инструментални методи.

Към недостатъците на експертните методи се отнасят субективизмът и високите разходи за тяхното прилагане.

За прилагането на експертен метод е необходимо спазването на следните условия:

- в работата на експертната комисия не трябва да присъстват фактори, които биха могли да повлияят на искреността на съжденията на експертите. мненията на експертите трябва да бъдат независими
- въпросите, поставени пред експертите, не трябва да допускат различно тълкуване
- експертите трябва да бъдат компетентни в областта на решаваните въпроси
- броят на експертите трябва да бъде оптимален
- отговорите на експертите трябва да бъдат еднозначни и да позволяват математическа обработка

Полезно е извършването на специално предварително обучение и инструктиране на експертите. В крайния етап от формирането на експертната група е целесъобразно да се проведе тестване. Тестването се състои в решаване на експертни задачи, подобни на реалните с известни (но не на експертите) отговори. На базата на резултатите от тестването се оценява компетентността и професионалната пригодност на експертите.

При наличие на информация за резултатите от работата на експерта в други експертни групи, критерий за неговата квалификация и опит може да бъде показателят “степен на надеждност” – отношението на броя на случаите, когато мнението на експерта съвпада с резултатите от експертизата към общият брой на експертизите, в които той е участвал.

Стойността на показателя, дадена от експерта е случайна величина, формирана от влиянието върху експерта на множество фактори. Резултатът, получен от група експерти, е множество от отделни случайни стойности със съответен закон на разпределение. При брой на експертите $n > 30$ множеството се подчинява на нормалния закон на разпределение, а при $n < 30$ – на закона на Стюдент. Несигурността на резултата (на средноаритметичното на стойностите дадени от експертите в групата) се определя по формулите за оценка на неопределеност на резултат от измерване. Стойностите извън границите $\pm 3\sigma$ се приемат за груби грешки и не участват при формирането на окончателния резултат от експертната оценка.

При отсъствие на възможност за предварителна подготовка на експертите се прилага метода “Делфи”. наименованието си метода носи на древногръцкия град Делфи, където съгласно легендата е съществувал съвет на мъдреците. методът “Делфи” се характеризира с:

- анонимност; експертите не се срещат помежду си, за да се избегне влиянието на авторитета или красноречието на който и да е от тях върху оценките на другите.
- многоетапност; след всеки кръг на оценки експертите се запознават с мнението на другите и при необходимост представят писмени обосновки на своята гледна точка. Съгласявайки се или не с мнението на своите колеги те могат да преразгледат своята гледна точка.
- контрол; след всеки кръг се проверява съгласуваността на мненията дотогава, докато разсейването на отделните мнения не стане по-малко от предварително зададена стойност.

При оценки по експертен метод могат да се въведат и коефициенти на значимост, отразяващи квалификацията на експертите.

При формирането на експертната група освен компетентност и квалификация следва да се отчитат и междуличностните отношения на експертите. Групата не трябва да се състои само от представители на една тясна специалност.

Обикновено броят на експертите в групата е не по-малък от 7. С увеличаване на броя на експертите в групата точността на оценката се повишава. Известно е, че когато за резултат се приема средноаритметичното $\bar{X}$ от n на брой оценки, средноквадратичното отклонение на средноаритметичното $s_{\bar{x}}$ (респ. средноквадратичната неопределеност) е $\sqrt{n}$ пъти по-малко от това на единична оценка. Това позволява при зададена неопределеност на резултата от оценката да се определи необходимия брой на експертите в групата.

При определяне на оптималния брой експерти в групата трябва да се отчита и нарастването на разходите и усложняване на съгласуваността на мненията на експертите при увеличаване на техния брой.

В зависимост от това в каква форма експертите изразяват своето мнение, т.е. по начина на провеждане на експертизата, оценката може да бъде: непосредствена, ранжиране, сравняване.

При непосредствените оценки по експертен метод стойностите на показателите на качеството се определят непосредствено в приети измервателни единици.

Ранжирането се състои в разполагане на обектите на оценка или на показателите в реда на тяхното предпочитане по важност или значимост. Заеманото при такова подреждане място се нарича ранг. Колкото по-висок е рангът, толкова по-предпочитан е обектът, толкова по-значителен и по-важен е показателят.

Сравняването бива последователно и по двойки. Последователното сравняване на всеки обект на експертизата със съвкупността от всички обекти, които имат по-нисък ранг, позволява да се коригира ранжирания ред. Последователното сравняване се извършва в следния ред:

- Обектите на експертизата се разполагат по реда на тяхното предпочитане (ранжиране).

- на най-важния обект се присвоява бал или коефициент на значимост 1, а на всички останали в реда на намаляване на тяхната значимост – балове или коефициенти на значимост от 1 до 0.
- Сравнява се обект от даден ранг със съвкупността на всички останали от по-нисък ранг. Ако по мнение на експертите той е по-предпочитан, отколкото сумата на всички останали взети заедно, коефициентът на значимост се коригира в посока на увеличаване така, че той да стане по-голям от сумата на коефициентите на значимост на всички обекти с по-нисък ранг. В противен случай коефициентът на значимост се коригира в посока на намаляване така, че той да стане по-малък от сумата на останалите обекти.

Сравняване по двойки е най-просто. Предпочитанието се изразява чрез посочване на номера на предпочитания обект.

Допитването до експертите може да бъде очно или задочно, групово или поотделно, персонифицирано или анонимно. Своите мнения експертите могат да изразяват в писмена или устна форма.

Социологическият метод се базира на събиране, обработване и анализ на информация за мненията на потребителите за качеството на стоките и услугите. Информацията се събира чрез анкетиране, интервюиране, гласуване, а също и чрез организиране на изложби и др.

Органолептичният метод се базира на информация, получена чрез използване на естествените възприятия на сетивните органи на човека: зрение, слух, обоняние, осезание, вкус. Този метод е широко разпространен при определяне на естетичните и ергономични показатели, на показателите на качеството на хранителни продукти и др. Достоверността на оценката по този метод силно зависи от квалификацията и способностите на извършващия оценката.

При оценката на качеството могат да се сравняват единичните показатели с базовите или да се използват комплексни или групови показатели.

Под оценяване на равнището на качеството на продукт се разбира сравняването на показателите на качеството на оценявания продукт с базови стойности. Тази оценка може да бъде представена в количествена или качествена форма. В количествена форма оценката се изразява със стойността на комплексния показател на качеството, изразяващ съвкупността от свойства на продукта. В качествена форма оценката се представя във вид на потвърждение на това, че показателят на качеството превъзхожда или не приетата за сравнение база.

При извършване на оценяването се различават класификационни, ограничителни и оценъчни показатели.

Класификационните показатели характеризират предназначението и областта на приложение на дадения вид продукт. По тези показатели се подбира групата аналози на оценявания продукт. Към класификационните показатели се отнасят:

- показателите, формиращи параметричния ред на типоразмерите (напр. товароподемност, мощност и т.н.)
- показателите за наличие на допълнителни устройства или свойства на продукта (напр. мобилен телефон с часовник, с календар, с камера, и т.н.)
- показателите, определящи класа на продукта или групата на неговите потребители (напр. фотоапарат за любители, за професионалисти и т.н.)
- показатели на изпълнението на продукта, определящи условията на неговото използване (напр. тропическо изпълнение)

Ограничителни (критични) показатели са показатели на безопасност и екологичност, чиито стойности трябва да отговарят на изискванията на международни или национални нормативни документи.

Оценъчните показатели характеризират свойствата на продукта, които са свързани със способността му да удовлетворява определени потребности. Те се използват за съпоставка с приетата за сравнение база (аналог). Към оценъчните показатели могат да бъдат отнесени:

- показателите, които определят функционалната пригодност на продукта да удовлетворява зададени потребности (напр. показатели на предназначението, на надеждност, ергономичност, естетичност)

- показатели, които определят материалните разходи и ресурси по създаването и използването на продукта.

Ако на повишаване на качеството на продукта съответства увеличение на стойността на показателя, той се нарича позитивен, а при намаление – негативен.

Оценяването на равнището на качеството може да се прави с цел вземане на решение за разработване или модернизация на продукта, а ако решение вече е взето – за избор на варианта.

В зависимост от целта на оценяването в групата на аналозите (базата за сравнение) могат да се включат:

- перспективни образци, чието излизане на пазара се очаква към момента на производството на оценявания продукт
- реални образци, които съществуват на пазара

Експертното оценяване на равнището на качеството на продуктите се осъществява на четири етапа.

На първия, подготвителен етап, се формулира целта на оценяването и формират работна и експертна групи. В състава на работната група влизат организатор, консултант по оценяването продукти и технически сътрудници. Формирането на експертната група включва определяне на нейната структура (например могат да бъдат предвидени няколко експертни подгрупи за оценка на различни групи показатели), на професионалния състав, броя на експертите и подбирането на експертите.

На втория етап се извършва избор на методите, начините и процедурите на оценяването. Изхождайки от целите на оценяването, наличната информация, избраните методи, сроковете и условията, работната група съставя списък на операциите, които трябва да извършат експертите.

Третият етап се реализира от експертната група, членовете на която изразяват своите мнения.

На четвъртия, заключителен, етап се прави обработка на мненията на експертите и се формира експертното заключение.

При разработване на методика за оценяване на равнището на качество следва да се вземат предвид следните основни положения:

- Качеството на обекта се характеризира с комплекс от показатели $X_1, X_2, \dots, X_r$.
- Равнището на качеството на продукта се оценява въз основа на съпоставка на неговите показатели с базови стойности. Относителната оценка на качеството на продукта, получена в резултат на сравняване на стойностите на показателите на неговото качество с базовите стойности на съответните показатели се нарича равнище на качеството на продукта.
- Равнището на качеството може да се разглежда и оценява по съвкупността от всички свойства на продукта и в различни аспекти: функционална пригодност, безопасност, надеждност, технологичност, защита на околната среда и др.
- Резултатите от оценяването на равнището на качеството, а също така и на конкурентоспособността на обектите могат да са за вътрешна консумация на фирмата при решаване на задачи на общото ръководство на качеството за целите на:
 - маркетинга, изучаване на пазара на продукта.
 - обосноваването на изискванията, заложили в техническото задание за разработване на продукта и нормативната документация.
 - избора на варианта при разработване на нов или модернизиран продукт.

- вземането на решение за пускане на продукта в производство.
- избора на доставчици на суровини, материали и комплектоващи изделия.
- формирането на предложения, свързани с вноса и износа на продукта.
- обосноваване на необходимостта от замяна или сваляне на продукта от производство.
- обосноваване на целесъобразността от доброволна сертификация на продукта.

• Процедурата за оценяване на равнището на качество на който да е обект включва следните общи за всички методи етапи:

- избор на номенклатурата на показателите на качеството, необходими за оценяване на обекти от дадения тип.

- формиране на групи аналози на оценяваните обекти и определяне на стойностите на техните показатели на качеството.

- съпоставяне на стойностите на показателите на качеството на оценяваните обекти с базовите стойности.

- формиране на оценка като резултат от сравнение.

- оформяне на заключение за резултата от оценяването.

• Номенклатурата на показателите, избрани за оценяване на равнището на качеството, трябва да съответства на целите на оценяването и да бъде еднакво за всички аналози и оценявани обекти.

• Показателите се делят на класификационни, оценъчни и ограничителни.

По стойностите на класификационните показатели подбират групата на аналозите на оценявания продукт.

Оценъчните показатели характеризират свойствата на продукта, свързани със способността му да удовлетворява определени потребности. Те се използват при сравняване на образците на продукта при оценяване на равнището на качеството.

Всеки оценъчен показател се характеризира с посоката на влияние върху качеството на продукта. Повишаването на качеството съответства на повишаване на стойностите на т.н. позитивни показатели, а намаляването на други, наречени негативни.

Ограничителните показатели се дефинират в зависимост от характера на решаваната задача и целта на оценяването и се използват като ограничители.

• Групата на аналозите се формира с цел определяне на равнището на изискванията, предявявани към обектите от даден тип на определен пазар. Всички аналози и оценяваният продукт трябва да имат еднакви или съпоставими стойности на класификационните показатели, определящи тяхната принадлежност към дадена група.

В зависимост от целта на оценяване на продукта в групата на аналозите се включват перспективни образци, за които се прогнозира, че ще излязат на пазара, и реални образци, които се предлагат на пазара в момента на оценяването.

• Базовите стойности на показателите се определят по съвкупност от стойности на показателите на качеството на аналозите. Използват се два начина за определяне на тези стойности:

- отделяне на базовите образци от групата аналози.

- изчисляване на теоретични базови стойности.

В зависимост от целта на оценяването за базови образци се отделят най-добрите, най-лошите или типичните образци на групата аналози. При различните методи за оценяване се използват различни принципи и правила за отделяне на базовите образци, но могат да се използват и всички аналози на оценявания продукт.

Теоретичните базови стойности на показателите се определят чрез пресмятане на базата на съвкупността от стойностите на показателите на качеството на аналозите. При различните методи се използват различни принципи на пресмятане: в най-простия случай се вземат най-добрите стойности на показателите.

При определяне на базовите стойности трябва да се отчита взаимните връзки на показателите на качеството на дадения вид продукт. Определянето на базовите стойности

чрез пресмятане удовлетворява това условие. Най-простият начин, когато за базови се вземат стойностите на най-добрите показатели от групата аналози, може и да не отговори на горното условие и затова прилагането на този начин не винаги е оправдано.

Основни принципи на оценяването на равнището на качеството на продукта е съпоставянето на съвкупността от стойности на показателите на оценявания продукт със съвкупността от базовите стойности на тези показатели.

В зависимост прилаганите методи за оценяване сравнението се извършва по различни правила. При използването на диференциалния метод се прави съпоставяне по двойки на оценявания и базовия образец на продукта по оценяваните показатели на качеството. При други методи такова сравняване в явен вид не се правим а съвкупността от показатели на оценявания продукт се сравнява с базови стойности посредством някакъв теоретичен модел.

- По резултатите от съпоставянето на стойностите на съвкупност от показатели на продукта с базовите стойности се формира резултатът от оценяването – оценката на равнището на качеството на продукта в цялост или в отделни аспекти. Тази оценка се представя в количествена или качествена форма.

Оценката се изразява в количествена форма чрез едно число, което се разглежда като стойност на комплексния показател на качеството, отразяващ определена съвкупност от свойства на продукта. Оценката се представя в качествена форма във вид на утвърждение на това, съответства ли или не съответства продуктът като цяло по разглежданата съвкупност от свойства на равнището на изискванията на даден пазар, превъзхожда ли ги или им отстъпва.

Оценяването на равнището на качеството е важен елемент при оценяване на конкурентоспособността на продукта. Под конкурентоспособност се разбира способността на продукта да заема и удържа позиции на конкретен пазар за даден интервал от време при конкуренция с други продукти, имащи аналогично предназначение.

Конкурентоспособността зависи от много фактори, като:

- цена,
- разходи за експлоатация и потребление,
- предлагания сервиз,
- реклама,
- имидж, авторитет на фирмата,
- отношение между търсене и предлагане.

Имиджът е репутацията на организацията, общественото мнение на потребителите, включително и на потенциалните за фирмата и нейните продукти.

За показател на конкурентността може да служи дялът на продажбите на продукта при удовлетворяване на пазарното търсене на този вид продукт, в общия обем на реализация на такъв вид продукт на даден пазар.

$$B = \frac{M_o}{M_\Sigma},$$

където

$$M_\Sigma = M_o + \sum_{i=1}^m M_i$$

M_o и M_i са обемите на продажба на оценявания продукт и неговите i -ти аналози.

m – брой на аналозите – конкуренти на дадения пазар.

M_Σ – общият обем на продажбите на конкуриращите се продукти на дадения пазар.

2. МЕТОДИ ЗА КОНТРОЛ НА КАЧЕСТВОТО

Контролът е сравняване на стойностите на показателите на качеството с нормираните стойности. Това е процес, при който посредством експеримент се установява дали стойността на контролираната величина принадлежи към едно предварително зададено множество от стойности.

На практика контролът се осъществява чрез сравняване на стойността на контролираната величина с други еднородни величини, чиито стойности съответстват на границите на зададеното множество (област) от стойности.

Резултатът от контрола е твърдение, че стойността на контролираната величина се намира (или не се намира) в предварително зададената област. *Методите за контрол* могат да бъдат класифицирани по различни признаци:

Според мястото в жизнения цикъл на продукта:

- контрол при проектирането
- входящ контрол (върху суровини, материали, доставни изделия ...)
- производствен контрол
 - пасивен
 - активен
 - междинен
 - самоконтрол
- изходящ контрол
 - краен контрол от контрольори
 - контрол от клиента или в негово присъствие
 - контрол от външна организация
- контрол при експлоатация

Според вида на контролирания признак:

- по количествен признак
- по качествен признак

Според обема на проверяваната продукция:

- пълен (100%-ен)
- извадков (статистически)
 - статистически процесен контрол (SPC)
 - приемателен статистически контрол (AS)

Според състоянието на обекта преди и след контрола:

- безразрушителен
- разрушителен

Основните етапи на процеса на контрол са:

- планиране
- провеждане
- коригиращи действия

При планирането се разработва план на контрола, както на процесите, така и на продуктите. При разчленяването на процесите по операции се посочват:

- какво се контролира
- защо се контролира
- къде се контролира
- кога се контролира
- кой контролира

- как се контролира и с какви средства

Планът на контрол включва:

- обем на извадката от зададена партида
- периодичност на контрола
- критерии за вземане на решение
- допустими стойности

Извършващият контрола трябва да има нужната квалификация и да бъде осигурен с ясно разбираеми писмени инструкции.

Основни *принципи на контрола на качеството*:

- Превантивност

Стойностите на показателите на качеството на продукта (следствие) зависят от стойностите на регулируемите променливи (причинни фактори) на процеса. Ако тази зависимост е позната и е възможно да се контролират (следят) параметрите на процеса, могат да се предотвратят нежелани отклонения на продукта. Т.е. ако е ясна връзката между причина и следствие, чрез контролиране на причината може да се предотврати следствието.

- Достоверност

Достоверността се дефинира като вероятност за вземане на правилно решение. Достоверността D количествено се изразява чрез рисковете α - вероятност за приемане на качествена продукция за некачествена и β - вероятност за приемане на некачествена продукция за качествена.

$$D = 1 - (\alpha + \beta)$$

Оценката трябва да почива на данни, добити чрез контрол с използване на калибрани средства за измерване.

- Независимост

Контролът трябва да се организира и осъществява от лица и звена, чиито цели и интереси са пряко свързани с резултатите от работата по качеството.

- Контрол "близо до източника" и "скоро след възникването"

След изпълнението на производствената операция, която е потенциален източник на дефекти, не бива да се извършва следваща операция, преди да е проверено дали не е възникнал дефект. Следващата операция може да задълбочи дефекта (ако той е поправим), или да се окаже безсмислена (ако дефекта е непоправим).

Времето от момента на възникване на дефекта до момента на откриването му и вземането на мерки за отстраняване на причините трябва да е възможно най-кратко.

- Да се контролира "което трябва", а не "което може"

Изхожда се от значимостта на показателите на качеството

- Самоконтрол - извършван от изпълняващия операцията

Възможен е, ако са изпълнени следните условия:

- работникът знае какво точно се очаква от него, т.е. познава спецификационните изисквания

- има на разположение и владее средствата и методите за контрол
- умее да регулира променливите на процеса
- ръководството е решило всички независещи от работника проблеми на качеството
- съществува и действа ориентирана към качеството комуникация
- работникът е мотивиран за подобряване на качеството

3. Методи за измерване и оценка на точността

Измерването представлява процес на експерименталното получаване на информация за големината на величината. Измерването е съвкупност от операции извършвани за определяне на стойността на величината. Резултат от измерване е информация за големината на величината получена експериментално. Резултатът от измерването е стойност приписана на измерваната величина чрез измерване

Същността на измерването се състои в сравнение на големините на две величини: първата – измерваната, а втората – величина с известна големина. Операцията сравнение се извършва с помощта на средства за измерване. Под средство за измерване се разбира използвано при измерването средство с нормирани метрологични характеристики. Метрологични са характеристиките, които влияят върх резултата от измерването.

Метод на измерване е общо описана логическа последователност от действия, използвана при извършване на измерването. Тясно свързани с термина метод са термините принцип и процедура на измерване. Принцип на измерване е явление, което служи за основа на измерването. Принципът може да е физическо, химическо или биологично явление. Например термоелектрическият ефект, използван при измерването на температура. Процедура на измерване е подробно описание на измерването в съответствие с един или няколко принципа на измерване и с дадения метод на измерване. Процедурата на измерване обикновено се описва в документ, който понякога се нарича “методика на измерването”. Обикновено тя е достатъчно подробна, за да може операторът да извърши дадено измерване без допълнителна информация.

Съществуват много класификации на методите за измерване, по които те се групират по различни признаци. Например по физическите принципи заложи в основите на измерването те могат да се разделят на електрически, магнитни, оптични, пневматични и др. В зависимост от режима на взаимодействие между средствата и обекта на измерване методите се разделят на статични и динамични. В зависимост от вида на използваните в средството за измерване измервателни сигнали – на аналогови и цифрови.

Широко разпространение е намерила класификацията по начина на сравнението на измерваната величина с мерките.

По тази класификация методите за измерване се разделят на две групи:

- методи на непосредствена оценка
- методи на сравняване с мярка

Макар и придобили гражданственост тези две наименования не са особено коректни. В основата на изследването лежи операцията сравнение. Следователно сравнението с мярка присъства при всяко измерване. Затова посочените две разновидности могат да се нарекат методи на опосредствено и непосредствено сравняване с мярка.

Същността на метода на непосредствена оценка (метода на опосредственото сравняване с мярка), се състои в това, че за стойността на измерваната величина се съди по показанията средства за измерване. В този случай сравняването с мярката е осъществено на предварителния етап на градуиране на средството за измерване. Това е най-разпространения метод на измерване, който се реализира от по-голямата част от средствата за измерване.

Отличителната черта на метода на сравняване с мярка е непосредственото участие на мярка в процеса на измерването. Такива са диференциалния метод, нулевия метод, метода на заместване и инкременталния метод (чрез броене).

Грешки и неопределеност на измерването

Грешка на измерване е разликата между резултата от измерване $x_{изм}$ и истинската $x_{ист}$ стойност на измерваната величина. Тъй като истинската стойност по природа не може да бъде определена, на практика се използва действителната (приписаната) стойност – най добрата оценка на стойността на величината. Следователно, би могло да се говори за истинска грешка (непознаваема) и действителна грешка (познаваема).

$$\Delta = x_{\text{изм}} - x_{\text{ист}}.$$

Относителна грешка Δ^* е отношението на грешката на измерване и истинската стойност на измерваната величина.

За оценка на точността на измервателните средства се използва показателят *приведена грешка* Δ^o – отношението на грешката и горната граница на обхвата на показанията или интервала на измерване на измервателното средство (най-често, представяно като процент).

Класификация на грешките

Според проявлението на грешките при повтарящи се измервания, те могат да се разделят на систематични, случайни и груби.

□ *Систематичната грешка* има устойчив характер. Тя винаги съпровожда резултата от измерването с постоянна или закономерно променяща се стойност. Числено тя се определя като разлика между средноаритметичната стойност, която би се получила от безкраен брой измервания на една и съща величина, извършени при повтарящи се условия, и истинската стойност на тази величина. По принцип систематичната грешка може да бъде разпозната, определена и резултатът от измерването може да се коригира с нейната стойност.

□ *Случайната грешка* характеризира разсейването, т. е. повторемостта на резултата от единичното измерване. Числено тя се определя като разлика между резултата от измерване и средноаритметичната стойност, която би се получила при безкраен брой измервания на една и съща величина, извършени при повтарящи се условия.

Случайната грешка се дължи на съвместното влияние на различни случайни фактори и нейната стойност не може да бъде определена предварително. По статистически път може да се определи само вероятността за нейното появяване.

□ *Грубата грешка* е случайна грешка, чиято стойност рязко се отличава от обикновено появяващите се грешки. Тя относително лесно може да се разпознае.

Според възможността за корекция грешките могат да се разделят на

□ *Предотвратими*. Такива грешки (напр. в резултат от неподходящи условия или неправилно обслужване на измервателните средства) не следва да се допускат. При евентуално появяване те могат да се разпознаят и съответните резултати да не се вземат под внимание.

□ *Коригируеми*. Такава е главната част от систематичните грешки. Тези грешки следва по принцип да се изключат от резултата, освен в случай, че стойностите им са твърде малки в сравнение с другите грешки, или коригирането е много трудоемко. Тогава $x_{\text{ист}} = x_{\text{изм}} + \Delta_{\text{попр}}$. Тук $x_{\text{ист}}$ е коригираният (поправен) резултат, а установената стойност на поправката $\Delta_{\text{попр}}$ се прибавя към измерената (непоправена) стойност $x_{\text{изм}}$.

□ *Некоригируеми* са случайните грешки и такива части от систематичните грешки, които с разполагаемите възможности не могат да бъдат разпознати, или пък определянето им е неизгодно по финансови или организационни причини.

Според причината за тяхното появяване грешките могат да се разделят на:

□ *Грешка, породена от принципа или метода* на измерване.

□ *Грешка на показанието на измервателното средство* (измервателния уред). Тази грешка се дължи на несъвършенства в принципа на действие, конструкцията или изпълнението на уреда и обикновено се определя при зададени (стандартни условия).

□ *Грешка, породена от влияещите величини* (фактори). Влиянието на фактори като външната среда (температура, хранващо напрежение, вибрации и пр.), момента на

измерването, оператора и т. н. предизвиква допълнителни грешки, които често имат значителна големина в сравнение с грешката на показанието.

Изложеното показва колко е важно да се разбира и отчита разликата между грешката на показанието на измервателното средство и грешката на резултата от измерването.

Методи за коригиране на систематичните грешки

Внасянето на поправка в резултата от измерването на пръв поглед е лесно, но изучаването на систематичната грешка и определянето на големината ѝ често е сложна и трудоемка задача.

От една страна, нерядко систематичните грешки превишават по големина случайните. От друга – трудностите произтичат от това, че систематичните грешки не могат да се разглеждат обобщено, а изискват специално разглеждане за всяка конкретна измервателна задача.

Могат да се обобщят следните методи за откриване и компенсиране на систематичните грешки.

1. Сравняване на измерените стойности с познати “еталонни” стойности на измерваната величина. Като еталон може да се използва и проверен образец или измервателен уред. Евентуалните поправки на измерваните стойности се представят в таблица или графика.

За да бъде възможно такова сравняване, се поддържа система от еталони и съответни проверочни схеми, позволяващи сравнимост (проследимост) на резултата от измерването с първичния еталон.

2. Оценяване на отклоненията на фактическата функция на преобразуване при измерването $x_{изх} = f(x_{вх})$ спрямо зададената (очакваната) функция.

Въз основа на оценените отклонения се формират и съответните поправки.

В тази група следва да се включат и случаите, когато поради характера на метода на измерване, могат да се получават симетрични и противоположни по знак отклонения на резултата от измерването, които взаимно могат да се компенсират.

Такъв случай е например грешката при измерване с кобилична везна поради отклонения на дължината на рамената ѝ. Друг пример е грешката при измерване на стъпката на резба с инструментален микроскоп, когато оста на детайла е наклонена спрямо направлението на движение на масата.

3. Оценка на грешките, внасяни от влияещите величини.

Въз основа на установените функционални връзки между тези величини (температура, налягане и пр.) от една страна и съответната грешка на измерване – от друга, се определят стойностите на поправките. Корекцията може да се въведе ръчно (с помощта на съответни таблици или графики) или автоматично, особено при наличие на микропроцесорно устройство в измервателната верига.

Неопределеност на резултата от измерване

Представянето на резултата от измерване чрез грешката на измерване е ефективно, когато е налице еталон, или друг източник, представящ с известна точност истинската стойност на измерваната величина, а с това – и възможност за оценка на грешката.

При липса на информация за истинската стойност на величината, нейната оценка в процеса на измерване може да бъде направена само с точност до големината на един интервал, в който с определена достоверност може да се очаква, че ще се появи истинската стойност – интервал на неопределеността на резултата.

В последните години международно бе утвърдената методика за оценяване на неопределеността на резултата от измерване. Тя създава възможност за прилагане на

унифицирана процедура и достигане до единство при оценка на качеството на получения резултат.

Неопределеност (несигурност) на измерване е параметър, свързан с резултата от измерване, който характеризира дисперсията на стойностите, които могат да бъдат приписани на измерваната величина.

Такъв параметър може да бъде *средноквадратичната неопределеност* $u(x)$.

$$u(x) = S(x), \text{ респ. } \sigma(x).$$

Най-често резултатът се представя чрез *разширената неопределеност* $U(x)$ – полуширината на интервал, в който се преценява, че се намира истинската стойност на измерваната величина.

$$U(x) = k \cdot u(x).$$

Коефициентът k , се нарича коефициент на покриване. Обикновено $k = 2$.

Примери за представяне на резултата от измерване:

$$x = 5,75 \text{ mm} \quad U = 0,05, \quad k = 2;$$

$$x = 5.75 \pm U = 5.75 \pm 0.05 \text{ mm}, \quad k = 2.$$

В общия случай неопределеността на измерването обхваща много съставлящи. Тяхното определяне може да се направи по два пътя.

□ *Оценка тип А.* Съставлящите, респ. неопределеността се оценяват на базата на статистически анализ на резултатите от серии измервания и се характеризират от експерименталните средноквадратични отклонения.

□ *Оценка тип Б.* Средноквадратичната неопределеност се основава на цялата налична информация, получена от:

- данни от предишни измервания;
- опит и общи познания за съответното измерване и измервателно средство;
- сертификати, справочни данни, спецификации на производителите и т.н.

Сумарна грешка и неопределеност на резултата от измерване (съставяне на бюджет на неопределеността)

Сумарната грешка на резултата от измерване включва компонентите на грешката, генерирани от различните фактори при измерването. По-важните от тях са:

Основна грешка на измервателното средство. Това е грешката на показанието, получена при нормирани условия.

Грешки, предизвикани от влияещите фактори, в т.ч.:

- От настройката на ИС, вкл. от настроените мерки;
- От температурата, влажността, налягането;
- От захранващото напрежение, осветеността и пр.;
- От измервателния натиск;
- От ориентацията на детайла и ИС;
- От отклоненията на формата на детайла, грапавостта и т.н.;
- Субективни грешки.

Сумарната граничната грешка се получава въз основа на теоремата за сумиране на дисперсиите:

$$\Delta_{\text{lim}\Sigma} = \pm \sqrt{\sum \Delta_{\text{lim}(j)}^2},$$

където $\Delta_{\text{lim}(j)}$ са граничните грешки, предизвикани от отделните фактори.

Комбинираната (сумарната) средноквадратична неопределеност $u_c(y)$ на резултата от измерване, когато този резултат е получен в резултат на влиянието на определен брой

други величини, е равна на положителния квадратен корен на сумата от дисперсиите на тези величини, претеглени с коефициентите на влияние на тези величини.

При взаимнонезависими (некорелирани) входни величини

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_1^N u_j^2(y)}$$

Величината $u_j(y)$ ($j = 1 \dots N$) е приносът на средноквадратичната неопределеност на входната величина x_j в средноквадратичната неопределеност на резултата от измерването

$$u_j(y) = C_j \cdot u(x_j),$$

където C_j е коефициентът на влияние.

В общия случай интервалът, характеризиращ неопределеността не е иден-тичен на доверителен интервал, свързан с известна доверителна вероятност, особено при включването и на рандомизирани систематични компоненти на грешката.

Бюджет на неопределеността е обобщено представяне на оценяването на съставлящите на неопределеността на резултата от измерването. Бюджетът включва списък на всички източници на неопределеност, свързаната с тях средноквадратична неопределеност и методите за нейното оценяване.

Грешка и неопределеност на резултата от косвени измервания

При косвени измервания търсената величина се определя след измерване на други величини, въз основа на известна функционалната връзка между търсената и входните величини, т.е. $y = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$.

Ако с $\Delta(y)$, съответно $\Delta(x_j)$, означим систематичните грешки или поправките на търсената и входните величини, връзката между тях, след разлагане в ред на Тейлор и прости преобразувания се определя от уравнението

$$\Delta(y) = \sum_1^N \frac{\partial y}{\partial x_j} \Delta x_j.$$

Тук частните производни представляват коефициентите на влияние на величините x_j .

$$C_j = \frac{\partial y}{\partial x_j}, \quad (j = 1, 2 \dots N).$$

Въз основа на теоремата за сумиране на дисперсиите за комбинираната неопределеност се получава:

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_1^N \left(\frac{\partial y}{\partial x_j} \right)^2 u^2(x_j)}.$$

Разширената комбинирана неопределеност ще бъде:

$$U_c(y) = k \cdot u_c(y).$$

Груби грешки при измерването

Грубите грешки представляват особен вид случайни грешки. Груба е грешката на резултат от отделно измерване, част от ред от измервания, която при дадените условия рязко се отличава от останалите резултати. Източници на груба грешка са обикновено резките изменения на условията на измерване (механични удари, вибрации, колебания на околната

среда, скокове в хранващото напрежение и др.) или неправилни действия на оператора (неправилно отчитане на показанията на средствата за измерване, неправилен запис на резултата др.)

Грубите грешки възникват като правило при еднократно измерване и обикновено се откриват и отстраняват при многократни измервания.

Коректна статистическа обработка на дадена извадка от данни е възможна само когато тя е еднородна т.е. когато всички нейни членове принадлежат на една и съща генерална съвкупност. При това е възможно част от членовете на дадена извадка да принадлежат на друга генерална съвкупност и да не се отличават съществено от членовете на първата, което прави изключително трудно идентификацията на двете съвкупности.

Наличието на аномални отчети се нарича *замърсяване на извадката*, а отстраняването от нея на силно отличаващите се по стойност от центъра на гупиране стойности – *цензуриране на извадката*.

Установяването на наличие на груба грешка Δy_i в резултата от наблюдението и решението за неговото изключване се осъществява по специални статистически критерии чрез статистическа проверка на хипотези.

Критерии за изключване на грубите грешки

За откриване и изключване на грубите грешки при многократни измервания се използват статистически критерии, при предварително приет закон на разпределение на резултатите от измерването.

Използват се общите методи за проверка на статистически хипотези. Проверяваната хипотеза H_0 , обикновено се състои в твърдението, че конкретният резултат y_i не съдържа груби грешки. Ако хипотезата бъде отхвърлена резултатът от измерването се приема за съдържащ груба грешка и се изключва от обработваната извадка.

При проверка се задава вероятността β (нивото на значимост) за това че съмнителният резултат, за който се предполага че съдържа груба грешка, може действително да е част от разглежданата съвкупност от резултати от измерване т.е. да не съдържа груба грешка.

- *Критерий на Райт*

Резултатът от измерването y_i не принадлежи на разпределението на разглежданата съвкупност от резултати (т.е. той съдържа груба грешка) със зададена вероятност, ако

$$|y_i - \bar{y}| > z \cdot s$$

където z е аргумент във функцията на Лаплас.

Или с други думи резултатът от измерването y_i може да се счита за съдържащ груба грешка, ако се намира извън границите на цензуриране.

$$\bar{y} \pm z s.$$

При нормално разпределение обикновено се приема $\gamma = 0,9973$, при което $z = 3$, затова критерият на Райт е известен под наименованието “критерии на трите сигма”. Вероятността β “нормален” резултат да излезе извън тези граници е много малка $\beta = 1 - \gamma = 0,0027$. Някои автори считат че границите $\pm 3\sigma$ са твърде тесни и формулират критерия на Райт по следния начин:

Ако е изпълнено условието

$$|y_i - \bar{y}| > 4 \cdot s$$

резултат y_i сигурно съдържа груба грешка, а ако

$$3s < |y_i - \bar{y}| < 4s$$

може да се предполага наличието на груба грешка.

Средната стойност на y и s се изчисляват без отчитане на екстремната стойност y_i .

Основен недостатък на критерия на Райт е това, че той е справедлив при брой наблюдения $n > 20-30$.

- *Критерий на Романовски*

Критерият на Романовски се използва, когато броят на измерванията $n < 20$. Според този критерий, резултат y_i съдържа груба грешка ако:

$$|y_i - \bar{y}| > t'_{\beta} \cdot s$$

Множителят t'_{β} е модифициран аргумент на функцията на Стюдент.

$$t'_{\beta} = t_{\beta} \sqrt{\frac{n+1}{n}}$$

Индексът β е ниво на значимост т.е. риск, за това че при определена стойност на t'_{β} , обикновените случайни грешки могат да бъдат признати за груби или че ако е изпълнено горното условие, грешката е груба с доверителна вероятност γ .

Критичната стойност при различни нива на значимост β и обем на извадката n са дадени в приложение.

4. ПРАВИЛА ЗА ДОКАЗВАНЕ НА СЪОТВЕТСТВИЕТО

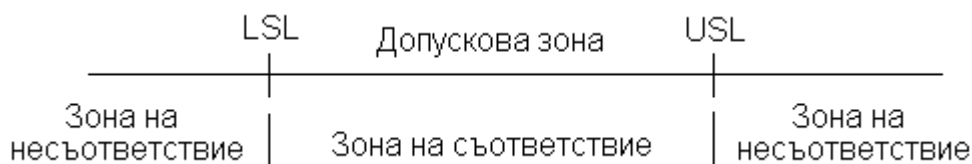
Съответствието или несъответствието със спецификацията (ISO10576-1) означава изпълнение или неизпълнение на отразените в нея изисквания към съответните характеристики на изделиято. Доказването на съответствието се осъществява чрез контрол. Контролът може да се извърши както посредством измерване за намиране на големината измерваната величина и последващото ѝ сравняване с нормираната стойност, така и без измерване. И в двата случая подложените на контрол изделия се отнасят към определени групи – такива, които удовлетворяват изискванията към съответната характеристика и такива, които не ги удовлетворяват.

Неопределеността на измерване е параметър, свързан с резултата от измерване, който характеризира разсейването на стойностите, които могат да бъдат приписани на измерваната величина въз основа на наличната информация. Резултатът от измерване е само приближение, т.е. оценка на стойността на измерваната величина. Той е пълен само тогава, когато се придружава с изявление за неопределеността (несигурността) на тази оценка. Неопределеността характеризира качеството на резултата от измерване.

Видове неопределеност:

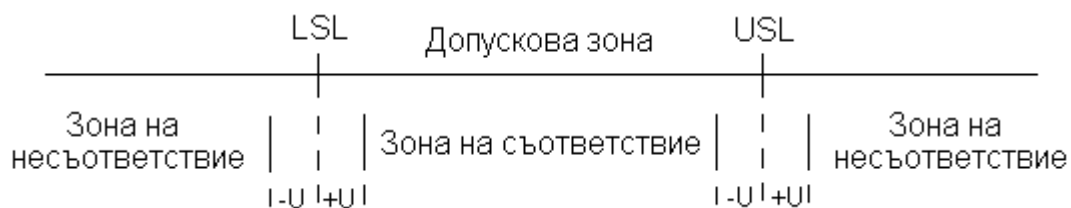
- комбинирана средноквадратична (стандартна) неопределеност u – неопределеността, изразена като средноквадратично отклонение.
- разширена неопределеност $U = k u$ – величина, която дефинира около резултата от измерване интервал, за който може да се очаква, че обхваща голяма част от разпределението на стойностите които биха могли да се припишат на измерваната величина. k е коефициент на покриване и зависи от приетата доверителна вероятност

Изискванията към характеристиките най-често се изразяват чрез техните гранични стойности USL и LSL, които определят допускателна зона. На фазата на проектиране на изделиято зоната на съответствие съвпада с допусковата зона.



фиг.3

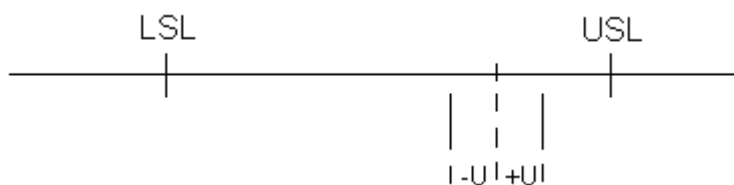
При контрол чрез измерване зоните на съответствие и несъответствие се променят в резултат на неопределеността на измерване (фиг.4). Зоната на съответствие се намалява с интервала на неопределеност на измерването ($2U = 2ku_c$), където U е разширената неопределеност, u_c – комбинираната неопределеност, а k – коефициент на покритие.



фиг.4

Възможни са следните три случая:

- Интервалът (зоната) на неопределеност е разположен в допусковата зона. Налице е съответствие със спецификацията (фиг.5) .



фиг.5

- Интервалът (зоната) на неопределеност се разполага извън допусковата зона. Налице е несъответствие със спецификацията (фиг.6).



фиг.6

- Интервалът (зоната) на неопределеност обхваща горната USL или долната LSL гранични стойности (фиг.7). В този случай не може категорично да се докаже съответствие или несъответствие. Оценката на съответствието или несъответствието може да бъде само вероятностна – чрез проверка на статистическа хипотеза. Възниква т.н. споделен риск от неправилно окачествяване, изразяващ се с риска α от неправилно бракуване на съответстваща продукция и риска β от неправилно приета несъответстваща продукция. Заклучителната формулировка следва да бъде: Оценката за съответствие не е способна да демонстрира, че стойностите на контролирания параметър съответстват или несъответстват на изискванията.



фиг.7

В този случай може да се използва двуетапна процедура за оценка на съответствието. Вторият етап включва повторно измерване, определяне на резултата като комбинация от двете измервания, ако новият интервал на неопределеност не обхваща гранични стойности се

взема решение за съответствие или несъответствие. В противен случай оценката за съответствие отново е неокончателна.

Доказването на съответствие или несъответствие може да се извърши като се въведат долна и горна граници на съответствие и несъответствие и резултатът от измерване се сравни с тях.

$LSL_c = LSL + U$ - долна граница на съответствие

$USL_c = USL - U$ - горна граница на съответствие

$LSL_n = LSL - U$ - долна граница на несъответствие

$USL_n = USL + U$ - горна граница на несъответствие

Ако $LSL_c < x < USL_c$ - съответствието е доказано.

Ако $LSL_n > x > USL_n$ - несъответствието е доказано.

Ако $LSL_n < x < LSL_c$ или $USL_c < x < USL_n$ не може категорично да се докаже съответствие или несъответствие.

Пример:

Максимално допустимата стойност е 70.

Резултатът от измерване е 74 ± 5 , $k=2$

$USL_c = 70 - 5 = 65$ - горна граница на съответствие

$USL_n = 70 + 5 = 75$ - горна граница на несъответствие

Тъй като $USL_c < 74 < USL_n$ не може категорично да се докаже съответствие или несъответствие.

В такъв случай, ако е възможно, може да се премине към втори етап на процедурата, при който измерването се повтаря. Ако при второто измерване полученият резултат е 77 ± 5 . Определя се средноаритметичното от двете измервания $0,5(74+77) = 75,5$. Тъй като $75,5 > USL_n$ е доказано несъответствие.

Ако не е възможно преминаване към втори етап на процедурата може да се повиши точността на измерване. Точността на измерване може да се повиши или чрез използване на друго по-точно измервателно средство или чрез увеличаване на броя на измерванията.

Пример:

Съгласно спецификацията изискванията към параметър на изделие са $100 \pm 0,05$

$LSL = 99,95$ $USL = 100,05$

Изделието е подложено на контрол чрез измерване. Тъй като не се разполага с информация относно неопределеността, е направено неколккратно измерване (измерването е повторено три пъти), като са получени следните резултати:

100,042; 100,044; 100,047

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum x_i = \frac{1}{3} (100,042 + 100,044 + 100,047) = 100,044$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{X})^2} = 0,0025$$

$$s_x = \frac{s}{\sqrt{n}} = 0,00145$$

Средноквадратичната неопределеност (оценка тип A) е:

$$u = h \cdot s_x = 2,3 \cdot 0,00145 = 0,0033$$

Коефициент на сигурност h

n	h
2	7
3	2,3
4	1,7
5	1,4
6	1,3
7	1,3
8	1,2
9	1,2
10	1

Разширената неопределеност при 95% доверителна вероятност ($k=2$) ще бъде:

$$U=2.0,0033=0,0066$$

$$LSLc=LSL+U=99,9566$$

$$USLc=USL-U=100,0434$$

$$LSLh=LSL-U=99,9434$$

$$USLh=USL+U=100,0566$$

Тъй като $USLh > 100,044 > USLc$ не може категорично да се докаже съответствие или несъответствие. Затова процедурата се продължава, като се правят още две измервания. Резултатите от тях са: 100,045 и 100,044.

Определя се средноаритметичното и средноквадратичното от петте измервания ($n=5$):

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum x_i = \frac{1}{5} (100,042 + 100,044 + 100,047 + 100,044 + 100,045) = 100,044$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{X})^2} = 0,0018$$

$$s_x = \frac{s}{\sqrt{n}} = 0,00081$$

$$u = h \cdot s_x = 1,4 \cdot 0,00081 = 0,00114 \quad (h=1,4)$$

$$U=2.0,00114=0,0023$$

$$LSLc=LSL+U=99,9523$$

$$USLc=USL-U=100,0477$$

$$LSLh=LSL-U=99,9477$$

$$USLh=USL+U=100,0523$$

Тъй като $LSLc < 100,044 < USLc$ съответствието с изискванията е доказано.

Върху вероятността за неправилно решение относно принадлежността към определена група по-голямо влияние оказва разсейването на контролирания параметър, отколкото неопределеността на измерване. С намаляване на разсейването на контролирания параметър (т.е. с увеличаване на индекса C_p) процентът на неправилно приетите и неправилно бракуваните обекти намалява, т.е. увеличава се достоверността на контрола. Систематичните грешки при измерването в повечето случаи оказват по-голямо влияние отколкото случайните и те трябва да бъдат откривани и изключвани чрез въвеждане на поправки в резултата от измерване. Въвеждането на производствени допуски значително намалява риска на потребителя (вероятността β).

При доказването на съответствие или несъответствие със спецификацията има две заинтересовани страни – доставчик (производител) и клиент (потребител). В резултат от неопределеността на резултата от измерването всяка от двете страни поема своя риск от неправилно окачествяване. Ето защо е необходимо предварително съгласие между тях относно обявената неопределеност. Доставчикът (производителят) е този, който доказва съответствието със спецификацията, отчитайки оценената неопределеност, като представя необходимите за това доказателства чрез бюджета на неопределеността. Клиентът (потребителят) доказва несъответствието, използвайки неопределеност, оценена чрез разработен от него бюджет на неопределеността. Желателно е и е икономически по-изгодно, съгласието относно декларираната от доставчика неопределеност да бъде постигнато на по-ранен етап.

5. СТАТИСТИЧЕСКИ МЕТОДИ ЗА КОНТРОЛ НА КАЧЕСТВОТО

Осигуряването на постоянни параметри на качеството е практически невъзможно поради въздействието на редица смущаващи фактори при протичането на даден процес. Те внасят елементи на неопределеност и предизвикват разсейване на параметрите на качеството. Това дава основание параметрите на качеството да се разглеждат като случайни величини и за оценката им да се прилагат методите на теорията на вероятностите и математическата статистика. Статистическите методи се явяват едно от мощните средства за контрол на качеството и за управление на процеса на осигуряването му.

Същността на статистическите методи за контрол на качеството се състои в това, че за оценката на една съвкупност (партида) от N елемента може да се съди по резултатите от контрола само на част от съвкупността n (извадка), без да се извършва контрол на цялата партида. Това води до значително намаляване на разходите за контрол, като при това вероятността за грешки в оценката се доближава до тази при 100% контрол.

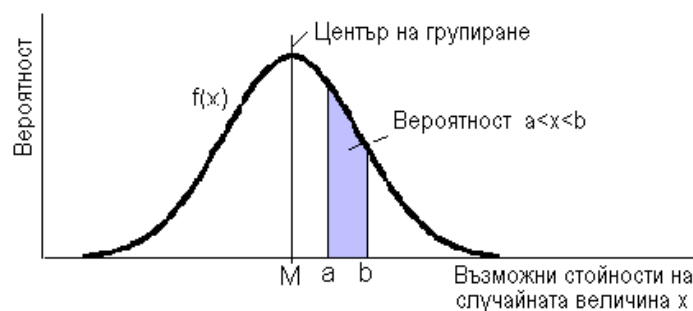
Статистическите методи за контрол могат да бъдат разделени на две основни групи:

- *Статистически контрол на процеси* (SPC - Statistical Process Control). Това са методи, използвани в процеса на производството с цел неговото проследяване, анализиране и управление. Те съставляват т. нар. оперативен (текущ) статистически контрол. Тези методи са известни още и като статистически методи за регулиране на технологични процеси тъй като дават възможност за своевременно намеса и отстраняване на причините, водещи до влошаване на качеството.

- *Статистически приемателен контрол* (AS - Acceptance Sampling). Това са методи, използвани за установяване на съответствието на желаните с постигнатите качествени параметри на наблюдавания обект. Те се прилагат предимно за готова продукция, като предоставят възможност за оформянето на изводи относно необходимостта от вземане на мерки за подобряване на качеството.

5.1. Основни понятия в статистиката

Под разпределение на случайна величина се разбира зависимостта между възможните стойности на тази величина и съответните им вероятности. При непрекъснати случайни величини разпределението се описва с функцията $f(x)$ - *закон на разпределението* (фиг.8). Вероятността случайната величина да попадне в зададен интервал $[a,b]$ се определя от площта под кривата $f(x)$ в този интервал. Законът на разпределение представлява функция и познаването на тази функция напълно описва случайната величина от вероятностна гледна точка. Често за практиката не е необходимо пълно описване на случайната величина. Достатъчно е да бъдат определени отделни числени параметри, които в известна степен характеризират разпределението на случайните величини. Например положението на случайната величина се характеризира от математическото очакване M (средна стойност, около която се групират стойностите на случайната величина), а разсейването около тази стойност се характеризира от средноквадратичното отклонение σ .



фиг.8. - Нормален закон на разпределение

Когато стойностите на една случайна величина се формират под въздействието на голям брой независими случайни фактори и отсъства рязко доминиращ фактор, случайната величина се подчинява на *нормалния закон на разпределение* (закон на Гаус). Този закон е най-често срещания на практика и има изключително важна роля в статистиката. Кривата на разпределението е със симетричен камбанообразен вид (фиг.8) и има два параметъра - M и σ .

Тъй като при статистическия контрол за качеството на една съвкупност (партида) от N изделия се съди по резултатите от контрола на извадка от нея с обем n ($n < N$), характеристиките на разпределението се определят по данните получени от извадката.

Числените характеристики на функцията на разпределение, получени в резултат от наблюдение на извадка се наричат *статистически (извадкови) характеристики*. Те се явяват оценки (статистически оценки, емпирични оценки) на числените характеристики M и σ на съвкупността N . За оценка на положението на центъра на групиране се използват от извадковите характеристики средноаритметична стойност, медиана, мода:

Средноаритметична стойност $\bar{X}$ (извадково средно) – характеризира положението на центъра на групиране, т.е. дава представа за това около коя стойност са съсредоточени стойностите на наблюдаваната количествена променлива и се определя като средноаритметичната стойност на всички индивидуални стойности в извадката:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Например ако са получени следните числени данни от извадка : 8; 6; 2; 3; 5, средноаритметичната стойност ще бъде: $\bar{X} = (8+6+2+3+5)/5 = 4,8$.

Средноаритметичната стойност $\bar{X}$ се явява оценка на математическото очакване M на генералната съвкупност N .

Понякога данните са от такъв характер, че всяко отделно наблюдение има различна степен на важност. В такъв случай се използва претеглено средно:

$$\bar{X} = \frac{\sum w_i x_i}{\sum w_i},$$

където w_i е предварително зададено “тегло”, съответстващо на значимостта на наблюдението. Ако се обработват групирани данни за “тегло” може да се приеме съответният брой наблюдения, попадащи в даден интервал на честотното разпределение, т.е. $w_i = v_i$ и $\bar{X}$ се определя по зависимостта:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m x_{im} v_i,$$

където m е броят на интервалите, а x_{im} - средните стойности на интервалите.

На фиг.9а са показани два закона на разпределение с различни характеристики на положението $\bar{X}$.

Средногеометрична стойност

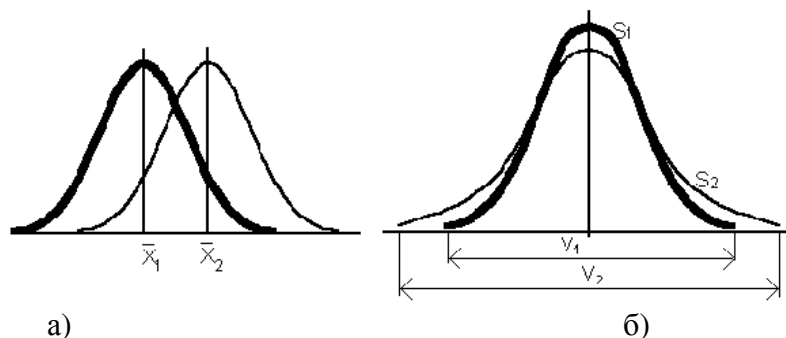
$$\bar{G} = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$

Средногеометричната стойност е предпочитана средна мярка за определяне на средния темп на нарастване на количествена променлива при изследване на нейното изменение във времето.

Медиана $\tilde{X}$

Медианата е стойността на случайната величина, при която площта под кривата на закона на разпределение се разделя на две равни части. За определяне на медианата числените данни от извадката с обем n се подреждат по възходящ ред и се определя намиращата се в средата на реда стойност.

Например ако са получени следните числени данни от извадка : 8; 6; 2; 3; 5, след подреждането им във възходящ ред: 2; 3; 5; 6; 8, намиращата се в средата на реда стойност е 5, т.е. $\tilde{X} = 5$. При нечетен брой се определя средноаритметичното на двете намиращи се в средата на възходящия ред стойности.



фиг. 9 Закони на разпределение с различни стойности на $\bar{X}$ и s

Мода M_o – това е стойността на най-често срещаното наблюдение в извадката.

За определяне на разсейването най-често се използват извадковите характеристики дисперсия s^2 , средноквадратично отклонение s и размах R :

Извадкова дисперсия s^2

Дефинира се по следния начин:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2$$

и се използва за оценка на дисперсията σ^2 на генералната съвкупност N .

Средноквадратично отклонение s - характеризира разсейването на индивидуалните стойности около средноаритметичната стойност и е оценка на средноквадратичното отклонение σ на генералната съвкупност N :

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2}$$

При малки извадки средноквадратичното отклонение s има по-малка стойност (s е отрицателно изместена оценка на σ), което налага да се прави корекция, като се определи неизместената оценка s' на средноквадратичното отклонение:

$$s' = \frac{s}{c_n},$$

където c_n е коефициент, зависещ от обема n на извадката (вж. приложение 2).

Например ако са получени следните числени данни от извадка : 8; 6; 2; 3; 5, средноквадратичното отклонение ще бъде:

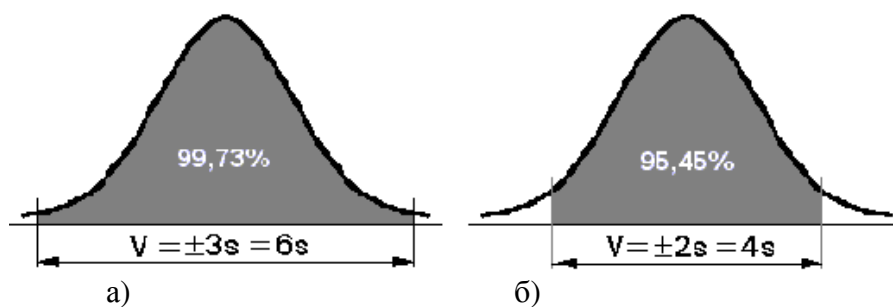
$$s = \sqrt{\frac{(8-4,8)^2 + (6-4,8)^2 + (2-4,8)^2 + (3-4,8)^2 + (5-4,8)^2}{5-1}} = 2,387; \quad s' = \frac{2,387}{0,94} = 2,536$$

На фиг.9б са показани два закона на разпределение с различни характеристики на разсейването s .

Размах R - разликата между най-голямата и най-малката стойности, получени в извадката.

$$R = x_{\max} - x_{\min}.$$

Размахът е ефективна характеристика на разсейването при малки извадки. За оценка на средноквадратичното отклонение σ чрез размаха може да се използва зависимостта $s'' = R/d_n$ (приложение 2).



фиг.10 Зони на разсейване

Зона на разсейване $V = \pm us$ - Област в която попадат определена част от стойностите на наблюдаваната величина. Множителят u зависи от вида на разпределението и приетата доверителна вероятност (вероятността за появата на събитие, което може да се счита за практически достоверно). Така например при нормален закон на разпределение в зоната $V=3s=6s$ ($u=3$) се съдържат 99,73% от всички стойности (фиг.10а), в зоната $V=2s=4s$ се съдържат 95,45% от всички стойности (фиг.10б). За целите на статистическия контрол доверителната вероятност се приема най-често $P=0,9973$, т.е. зоната на разсейване е $V=3s=6s$ (при нормално разпределение).

На практика често се срещат разпределения на случайната величина близки до нормалното разпределение, които се характеризират с параметрите коефициент на асиметрия и ексцес.

Коефициентът на асиметрия A характеризира несиметрията на кривата на разпределение спрямо центъра на групиране:

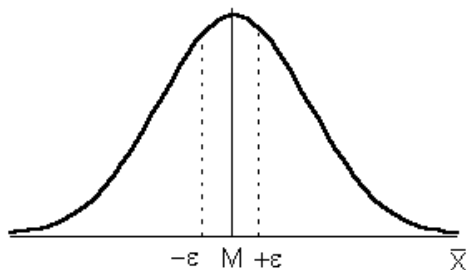
$$A=3(\bar{X}-\tilde{X})/s$$

Коефициентът на асиметрия помага за избора на по-устойчивата средна мярка за положението. Например при наличието на твърде големи или твърде малки стойности в сравнение с всички останали в извадката, медианата се влияе по-слабо и затова в такива случаи е предпочитана средна мярка.

Коефициент на ексцес E – характеризира остротата на върха на кривата на разпределение:

$$E = \frac{\sum (x_i - \bar{X})^4}{ns^4} - 3$$

Ако от една партида се направят няколко извадки и се определят характеристиките на разпределението им ще се установи, че те не са еднакви, т.е. и техните стойности се разсейват. Отстраняването на тази неопределеност е невъзможно. Разсейването може да бъде намалено с увеличаване на обема на извадките, но това е икономически неизгодно. Затова се преминава към *интервална оценка* на характеристиките на разпределението. Интервалната оценка представлява интервал от числената ос, за който се предполага че съдържа с определена вероятност истинската стойност на оценяваната характеристика на разпределението. Особено голямо значение за практиката има разсейването на характеристиките на положението $\bar{X}$ и $\tilde{X}$. Средноаритметичните стойности $\bar{X}_i$ при неограничен брой извадки имат нормално разпределение с математическо очакване M и дисперсия s^2 (фиг.11).



фиг. 11. Доверителен интервал на математическото очакване

Доверителните граници на математическото очакване при нормално разпределение се определят от зависимостта:

$$\pm \varepsilon = \pm t_{\gamma} s_{\bar{X}} ,$$

т.е. математическото очакване M се намира в доверителния интервал:

$$(\bar{X} - t_{\gamma} s_{\bar{X}}) < M < (\bar{X} + t_{\gamma} s_{\bar{X}}) ,$$

където t_{γ} е статистика на Стюдент, чиято стойност се определя от таблици (БДС 11316) в зависимост от доверителната вероятност γ и броя на степените на свобода $k=n-1$, а $s_{\bar{X}}$ е средноквадратичното отклонение на средноаритметичните стойности $\bar{X}$:

$$s_{\bar{X}} = \frac{s}{\sqrt{n}} .$$

Ако законът на разпределение на случайната величина не е известен, доверителните граници са $\varepsilon = t s_{\bar{X}}$, където t е величина, която при зададена доверителна вероятност може да се определи от неравенството $\gamma > 1 - 1/t^2$.

Средноквадратичното отклонение на медианата може да се определи от формулата:

$$s_{\tilde{X}} = \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \cdot s .$$

Разпределението на средните стойности на извадките служи за определяне на центъра на групиране на генералната съвкупност (партидата) и при изследване на технологични процеси характеризира тяхната настроеност.

Управлението на качеството на технологичен процес се основава на:

- получаване на информация за състоянието на обекта чрез измерване или контрол и определяне на изискванията, предявявани към параметрите на обекта;
- обработване на информацията за състоянието на обекта;
- вземане на решение за изменение на състоянието на обекта и изработване на правила за въздействие;
- въздействие върху обекта в съответствие с избраните правила.

Информационното осигуряване на реален технологичен процес се състои в:

- разработване на математичен модел на обекта, позволяващ да се разкрият закономерностите на процеса на формиране на качеството на продукцията на всички етапи от нейното изработване;

- изследване на законите на разпределение на параметрите които формират качеството;
- избор на методи за оценка на качеството на продукцията.

Разработването на математичен модел на обекта може да се осъществи чрез методите на *дисперсионния, корелационния и регресионния анализ*, както и чрез методите на *планиране на експеримента*.

Класическата методика за определяне на вида на закона на разпределение се състои в издигане на конкретна хипотеза на етапа на обработване на експерименталните данни и последваща проверка на тази хипотеза с помощта на някой от критериите за съгласие.

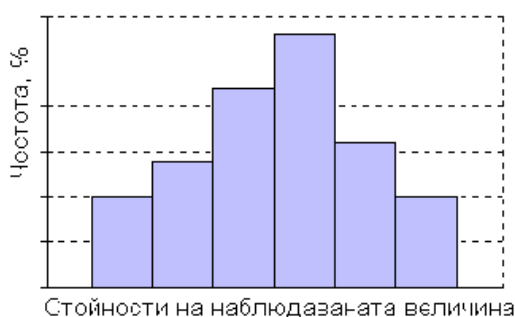
Оценката на качеството на готовата продукция се извършва чрез методите на статистическия приемателен контрол (AS), а за проследяване на протичането на технологичния процес с цел неговото регулиране се прилагат методите на статистическия процесен (текущ) контрол (SPC).

Всеки статистически анализ започва със събиране на данни за контролирания обект. Събирането на данните се осъществява чрез наблюдение (измерване, контрол) на изследвания параметър на качеството. Данните, получени при наблюдение на количествен признак на обекта могат да бъдат резултатите от измерване на стойностите на определен негов параметър ($x_1, x_2, \dots, x_n$). Данните, получени при наблюдение на качествен (неколичествен) признак на обекта са определени нива (категории) на качеството му определени в резултат от проведен контрол.

За нагледно представяне на честотното разпределение на числените данни получени при наблюдение се използват графични методи - полигон на разпределение (фиг.12а) и хистограма (фиг.12б), при които по абсцисната ос се нанасят стойностите на наблюдаваната величина, а по ординатната ос - техните абсолютни или относителни честоти. Хистограмата и полигонът позволяват приблизително определяне на центъра на групиране, зоната на разсейване и формата на опитното разпределение.



фиг.12а Полигон на разпределение



фиг.12б Хистограма

5.2. Проверка на статистически хипотези

Проверката на хипотеза е статистическа процедура със зададено ниво на риска (ниво на значимост α или доверителна вероятност $\gamma=1-\alpha$) за определяне на съвместимостта на съвкупност от данни с определено твърдение относно разпределението или стойността на някой от параметрите на разпределението. Процедурата за проверка на хипотеза включва оценяване на доказателството за вземане на решение за отхвърляне или не на твърдението.

Статистическите хипотези биват: нулева, алтернативна, насочени, ненасочени, параметрични, непараметрични.

Нулева хипотеза H_0 - хипотезата, която се проверява. Например това е хипотеза, че няма различие $X_1 - X_2 = 0$, където X_1 и X_2 са съпоставяните стойности на признака.

Ако дадена хипотеза не е вярна, то трябва да съществува друга противоположна – алтернативна хипотеза H_1 .

Насочени хипотези $H_0 : X_1$ не превишава X_2
 $H_1 : X_1$ превишава X_2

Ненасочени хипотези $H_0 : X_1$ не се отличава от X_2
 $H_1 : X_1$ се отличава X_2

Когато е зададен вида на закона на разпределение и се формулират хипотези за неговите параметри – хипотезите се наричат параметрични. Например хипотезата: нормално разпределена съвкупност има математическо очакване равно на M .

Когато не е зададен вида на разпределението - хипотезите са непараметрични. Например хипотезата: разпределението на съвкупността е нормално.

Проверката на хипотези се извършва с помощта на критерии за статистическа оценка. Издигнатата нулева хипотеза се проверява чрез специално подбрана случайна величина, разпределението на която е известно. Тази случайна величина се нарича статистически критерий.

Неправилното отхвърляне на вярна нулева хипотеза се нарича грешка от I род. Вероятността за допускане на грешка от I род е α . Неправилното приемане на грешна нулева хипотеза се нарича грешка от II род. Вероятността за допускане на грешка от II род е $\beta=1-\alpha$.

Проверка на хипотезата за равенство на математическото очакване на зададена стойност

Предполага се, че наблюдаваната случайна величина има нормално разпределение, направените наблюдения са независими и имат еднаква дисперсия. Ако с M се означава математическото очакване на случайната величина, а с M_0 – зададената стойност, възможни са следните хипотези:

- двустранен критерий - $H_0: M=M_0$; $H_1: M \neq M_0$
- едностранен критерий - $H_0: M \leq M_0$; $H_1: M > M_0$
- едностранен критерий - $H_0: M \geq M_0$; $H_1: M < M_0$

Проверката се извършва по различен начин, когато е известна дисперсията σ^2 и когато е известна само нейната оценка s^2 .

Дисперсията σ^2 е известна:

- изчисляват се величините:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum x_i \quad U = \frac{(\bar{X} - M_0) \sqrt{n}}{\sigma}$$

- по таблицата за интеграла на Лаплас или с функцията NORMSINV се намира такава критична стойност $u_{кр}$ за която

$\Phi(u_{кр})=1-\alpha/2$ за двустранен критерий, т.е. $u_{кр}=\text{NORMSINV}(1-\alpha/2)$

$\Phi(u_{кр})=1-\alpha$ за едностранен критерий, т.е. $u_{кр}=\text{NORMSINV}(1-\alpha)$

- проверката се изпълнява по следните правила:

двустранен критерий – ако $|U| < u_{кр}$ H_0 може да се приеме

ако $|U| > u_{кр}$ H_0 се отхвърля

едностранен критерий с алтернатива $H_1: M > M_0$ - ако $U < u_{кр}$ H_0 не се отхвърля

ако $U > u_{кр}$ приема се алтернативата

едностранен критерий с алтернатива $H_1: M < M_0$ - ако $U > -u_{кр}$ H_0 не се отхвърля

ако $U < -u_{кр}$ приема се алтернативата

Пример: За да се провери дали е постигната целева (желана) стойност $M_0=100$ даден параметър на качеството е направена извадка с обем $n=150$, за която след измерване на параметъра на качеството е

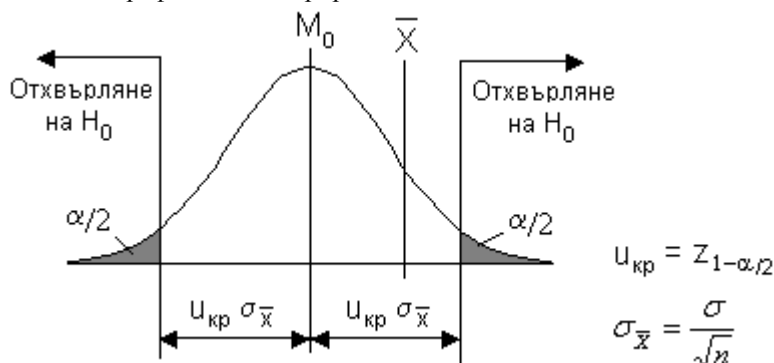
определена $\bar{X} = 102$. Средноквадратичното отклонение на процеса е известно $\sigma=16$. Приема се ниво на значимост $\alpha=0,05$. Издига се нулева хипотеза $\bar{X} = M_0$ и алтернативна $\bar{X} \neq M_0$. Тъй като обема на извадката е голям, то може да се приеме, че извадковото разпределение на средните стойности е нормално. Дисперсията е известна и може да се приложи U-критерия.

$$U = \frac{(\bar{X} - M_0)\sqrt{n}}{\sigma} = \frac{(102 - 100)\sqrt{150}}{16} = 1,53$$

$$u_{кр} = Z_{1-\alpha/2} = \text{NORMSINV}(1-\alpha/2) = \text{NORMSINV}(0,975) = 1,96$$

Тъй като $U < u_{кр}$ то нулевата хипотеза се приема, т.е. желаната стойност е постигната.

На долната фигура е показана графичната интерпретация.



Тъй като средната стойност попада в интервала $[M_0 - u_{кр} \sigma_{\bar{X}}; M_0 + u_{кр} \sigma_{\bar{X}}]$, който в случая е $[97,45; 102,55]$ нулевата хипотеза се приема.

Дисперсията σ^2 е неизвестна:

- изчисляват се величините:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{X})^2 \quad \text{и} \quad T = \frac{(\bar{X} - M_0)\sqrt{n}}{s}$$

величината T има разпределение на Стюдент с $v=n-1$ степени на свобода

- от таблиците на разпределението на Стюдент или с функцията TINV се определя $t(v, \alpha/2)$ за двустранен критерий или $t(v, \alpha)$ – за едностранен критерий
- проверката на хипотезата се изпълнява по следните правила:

двустранен критерий – ако $|T| < t(v, \alpha/2)$ H_0 не се отхвърля (може да се приеме)

едностранен критерий с алтернатива $H_1: M > M_0$ – ако $T < t(v, \alpha)$ H_0 не се отхвърля

едностранен критерий с алтернатива $H_1: M < M_0$ – ако $T > -t(v, \alpha)$ H_0 не се отхвърля

Когато броят на наблюденията е голям ($n > 30$), разпределението на Стюдент се стреми към нормалното разпределение и дори да дисперсията да се оценява чрез s^2 може да се приложат правилата за известна дисперсия – да се прилага U-критерия.

Критерият на Стюдент за проверка на хипотези се смята за относително устойчив към нарушение на предпоставката за нормалност, тъй като t -разпределението асимптотично се стреми към нормалното при $n \rightarrow \infty$. Поради това дори разпределението да се отличава от нормалното, ако n е голямо величината T е асимптотично нормална и критерия на Стюдент е приложим.

Проверка на хипотезата за равенство на две математически очаквания

Прилага се за решаване на една от следните задачи:

- да се провери различават ли се средните стойности на две случайни величини
- да се провери дали средната стойност на една от две случайни величини е по-голяма от средната стойност на другата

Дисперсиите на двете извадки σ_1^2 и σ^2 могат да бъдат известни или да се определят експериментално чрез оценките s_1^2 и s_2^2 . В зависимост от това се използват различни правила за проверка на хипотезата.

Възможни са следните хипотези:

- двустранен критерий - $H_0: M_1=M_2$; $H_1: M_1 \neq M_2$
- едностранен критерий - $H_0: M_1 \leq M_2$; $H_1: M_1 > M_2$
- едностранен критерий - $H_0: M_1 \geq M_2$; $H_1: M_1 < M_2$

Дисперсиите са известни

- Изчислява се величината

$$U = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

- По таблицата за интеграла на Лаплас или с функцията NORMSDIST се намира такава критична стойност $u_{кр}$ за която

$\Phi(u_{кр})=1-\alpha/2$ за двустранен критерий

$\Phi(u_{кр})=1-\alpha$ за едностранен критерий

- Проверката се изпълнява по следните правила:

двустранен критерий – ако $|U| < u_{кр}$ H_0 не се отхвърля

едностранен критерий с алтернатива $H_1: M_1 > M_2$ - ако $U < u_{кр}$ H_0 не се отхвърля

едностранен критерий с алтернатива $H_1: M_1 < M_2$ - ако $U > -u_{кр}$ H_0 не се отхвърля

Дисперсиите са неизвестни, но са равни

Например може да се смята, че дисперсиите на две извадки са еднакви, ако се сравняват две партии от продукцията, произведена при еднакви условия – еднаква технология и оборудване. Ако съществува колебание относно равенство на дисперсиите, първо трябва да се провери хипотезата за равенство на дисперсиите.

- Изчисляват се оценките на дисперсиите s_1^2 и s_2^2 .
- Използва се разпределението на Студент (t-критерия) с $v=n_1+n_2-2$ степени на свобода и се изчислява величината T

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}} \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}}$$

- от таблиците на разпределението на Студент или с функцията TINV се определя $t(v, \alpha/2)$ за двустранен критерий или $t(v, \alpha)$ – за едностранен критерий
- проверката на хипотезата се изпълнява по следните правила:

двустранен критерий – ако $|T| < t(v, \alpha/2)$ H_0 не се отхвърля

едностранен критерий с алтернатива $H_1: M_1 > M_2$ - ако $T < t(v, \alpha)$ H_0 не се отхвърля

едностранен критерий с алтернатива $H_1: M_1 < M_2$ - ако $T > -t(v, \alpha)$ H_0 не се отхвърля

Пример: При еднакви условия са обработени с райбер по 25 отвора с диаметри 6 и 10mm. Резултатите от измерване са показали, че средната стойност на разбиването на отворите (разликата между диаметъра на отвора и на райбера) са съответно: за райбер 6 – 10,9 μm , а за райбер 10 – 9,8 μm . Оценките на дисперсиите в двата случая са съответно $s_1^2 = 3,8 \mu m^2$; $s_2^2 = 4,76 \mu m^2$. Необходимо е да се провери влияе ли диаметъра на райбера върху рязбиването на отворите.

Издига се нулева хипотеза $H_0: M_1=M_2$, т.е. стойностите 10,9 и 9,8 са равни (не се различават съществено и разликите не се дължат на различните диаметри на инструмента).

Използваме t-критерия

$$T = \frac{10,9 - 9,8}{\sqrt{(25 - 1)3,8 + (25 - 1)4,76}} \sqrt{\frac{25 \cdot 25 (25 + 25 - 2)}{25 + 25}} = 1,88$$

$T_{кр} = t(48; 0,05) = 2,01$ при доверителна вероятност 0,95

Тъй като $T < T_{кр}$ то нулевата хипотеза няма основание да се отхвърли и може да се счита че размерът 6 или 10mm не оказва съществено влияние на разбиването на диаметъра на отвора.

Проверка на хипотезата за равенство на дисперсията на зададена стойност

Дисперсията е мярка за разсейването на стойностите на случайната величина около нейната средна стойност. Описваната проверка се извършва, когато е необходимо това разсейване да не надхвърля определена стойност. Така може да се прави проверка на уреди, машини, устойчивост на технологични процеси.

Ако със σ^2 се означава дисперсията на случайната величина, а с σ_0^2 – зададената стойност, възможни са следните хипотези:

- двустранен критерий - $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$; $H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$
- едностранен критерий - $H_0: \sigma^2 \leq \sigma_0^2$; $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$
- едностранен критерий - $H_0: \sigma^2 \geq \sigma_0^2$; $H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$

Изчисляват се $\bar{X}$ и s^2

Величината $\chi^2 = (n-1)s^2 / \sigma_0^2$ има χ^2 разпределение с брой на степените на свобода $v=n-1$.

- От таблиците на χ^2 разпределението или с функцията CHINV се определят стойностите $\chi^2(v, \alpha/2)$ и $\chi^2(v, 1-\alpha/2)$ за двустранен критерий. За едностранен критерий с алтернативна хипотеза $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$ се определя стойността $\chi^2(v, \alpha)$, а за едностранен критерий с алтернативна хипотеза $H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$ - $\chi^2(v, 1-\alpha)$.
- Проверката се извършва по следните правила:

Двустранен критерий: нулевата хипотеза не се отхвърля ако е изпълнено неравенството

$$\frac{vs^2}{\chi^2(v, \alpha/2)} \leq \sigma_0^2 \leq \frac{vs^2}{\chi^2(v, 1-\alpha/2)}$$

и се отхвърля в противен случай.

Едностранен критерий - $H_0: \sigma^2 \leq \sigma_0^2$; $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$: нулевата хипотеза не се отхвърля ако

$$\frac{vs^2}{\chi^2(v, \alpha)} < \sigma_0^2$$

и се отхвърля в противен случай.

Едностранен критерий - $H_0: \sigma^2 \geq \sigma_0^2$; $H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$: нулевата хипотеза не се отхвърля ако

$$\frac{vs^2}{\chi^2(v, 1-\alpha)} < \sigma_0^2$$

и се отхвърля в противен случай.

Критериите за проверка на дисперсиите, използващи χ^2 разпределението са слабо устойчиви към нарушаване на предпоставката за нормалност, дори и при големи извадки.

Проверка на хипотезата за равенство на две дисперсии

Задачата за сравнение на две дисперсии е една от най-често срещаните в статистическите изследвания. Тя се формулира когато е необходимо да се сравнят две методики за изследване, използва се в статистическия контрол на качеството, при дисперсионния и регресионния анализ за проверка на значимостта на влиянието на даден фактор, за проверка на адекватността на математически модел и др.

σ_1^2 – дисперсията на случайната величина X

σ_2^2 – дисперсията на случайната величина Y

Изчисляват се s_1^2 и s_2^2 – оценки на дисперсиите σ_1^2 и σ_2^2 .

Съставя се дисперсионното отношение:

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2},$$

като в числителя се взема по-голямото от двете оценки (в случая $s_1^2 > s_2^2$).

Изчисляват се броя на степените на свобода за числителя $v_1=n_1-1$ и за знаменателя $v_2=n_2-1$. При зададено ниво на значимост α от таблиците на разпределението на Фишер или с функцията FINV се определя $F(\alpha, v_1, v_2)$.

Ако $F \leq F(\alpha, v_1, v_2)$, нулевата хипотеза $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ не се отхвърля. В противен случай тази хипотеза се отхвърля и се приема алтернативната хипотеза $H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$.

При анализа на извадкови данни може да се наложи да се провери хипотезата за еднородност на дисперсиите в няколко (повече от две) извадки. В такива случаи може да се използва критерия на Кохрен.

$$G_H = \frac{s_{i\max}^2}{\sum s_i^2}$$

Пример: За горния пример да се провери хипотезата за равенство на двете дисперсии.

Тъй като $s_2^2 > s_1^2$, то $F=4,76/3,8=1,25$. $F_{кр} = F(0,05,24,24)=1,98$. Тъй като $F \leq F_{кр}$ нулевата хипотеза за равенство на дисперсиите се приема.

Пример: На четири автомата, настроени за обработване на едини и същи детайли са взети по една извадка с обем 10. Оценките на дисперсиите имат следните стойности: $s_1^2=106\mu m$, $s_2^2=294\mu m$, $s_3^2=216\mu m$, $s_4^2=410\mu m$. Да се определи еднаква ли е точността на автоматите, т.е. може ли да се приеме хипотезата за еднородност на дисперсиите.

Прилага се критерия на Кохрен. $G_H=410/(106+204+216+410)=0,3996$

Критичната стойност на критерия $G_{Hкр}=0,502$ при доверителна вероятност 0,95. Тъй като $G_H < G_{Hкр}$ то може да се счита, че точността на автоматите е практически еднаква.

Проверка на хипотези за вида на закона на разпределение

Установяването на закона на разпределение на случайна величина въз основа на статистически данни се състои в това, че се издига хипотеза H_0 за вида на това разпределение и се проверява. Избира се критерий за съгласие и по данните на проведените наблюдения се изчисляват стойностите на критерия и вероятността тази стойност да бъде в съответствие с издигнатата хипотеза H_0 . Ако тази вероятност е достатъчно голяма, хипотезата може да се приеме като непротиворечаща на резултатите от наблюденията.

Един от най-разпространените критерии за съгласие е критерият на Пирсън (χ^2). Този критерий е изисква групиране на данните от наблюденията.

Като критерий за проверка на хипотезата се използва величината:

$$\chi^2 = \sum \frac{(n_i - n p_i)^2}{n p_i}$$

$p_i = F(x_i) - F(x_{i-1})$

От таблиците на χ^2 разпределението или с функцията CHIINV се определят стойностите $\chi_{\alpha, v}^2$ при зададени ниво на значимост α и брой степени на свобода $v=l-1-k$, където l са броя на групите, а k - бр. на изчислените параметри на закона на разпределение (средна стойност, средноквадратично).

Ако $\chi^2 < \chi_{\alpha, v}^2$, то може да се счита, че данните от наблюденията не противоречат на твърдението на нулевата хипотеза и тя може да се приеме.

При малък брой опитни данни може да се използва и графичен метод, който се основава на използването на т.нар. “вероятностна хартия”, отнасяща се за проверявания закон на разпределение. Обикновено графиката на функцията на разпределение $F(x)$ на една случайна величина е крива. Чрез подходящо преобразуване на функцията $F(x)$, може да се окаже възможно графиката $F(x)$ да се представи в права линия. Тези преобразувания за различните закони на разпределение са различни. Въз основа на тях са разработени т.нар. “вероятностни хартии” за съответните закони на разпределение.

Използването на “вероятностната хартия” се състои в следното:

- Получените експериментални данни без да се групират се подреждат във възходящ ред
- За всяка стойност x_i се пресмята стойността на функцията на разпределение $F(x)=j/n$, където n е общия брой на опитните данни, а j – номерът на j -тата опитна стойност
- Точките с координати $[x_i, F(x_i)]$ се нанасят на вероятностната хартия. Доколкото тези точки се разполагат в права линия, дотолкова разпределението, на чиято хартия са нанесени точките, може да се счита за подходящо.

5.3. Оценка на възможностите на процеси

Един от инструментите за управление на процесите е анализът на техните възможности чрез оценка на разсейването им в рамките на нормираното. Прости и надеждни индикатори за оценка на процесите са показателите за възможностите C_p (потенциална) и C_{pk} . C_p се определя чрез отношението на допустимото разсейване и действителното разсейване. Допустимото разсейване най-често се определя като разлика между горната USL и долната LSL граници на допусковото поле ($T = USL - LSL$). Като мярка за действителното разсейване на оценяваните стойности x_i на параметъра на качеството се използва зоната на технологичното разсейване V , т.е.

$$C_p = \frac{T}{V} = \frac{USL - LSL}{6\sigma}$$

Ако за оценка на средноквадратичното отклонение σ се използва размаха R , то:

$$C_p = \frac{USL - LSL}{6(R/d_n)}$$

Най-малката приемлива стойност на индексът $C_p=1$. Препоръчва се $C_p \geq 1,33$, тъй като при изчисляването на C_p се използва не σ , а неговата оценка, а също така стойността 1,33 създава определен гарантиран запас.

Показателят C_{pk} характеризира настройката на процеса и се определя като отношение на отклонението на центъра на групиране и половината разсейване. Когато центърът на групиране, определен чрез средноаритметичното $\bar{X}$ е по-близо до горната допускова граница се използва показателят $CPU = (USL - \bar{X})/3\sigma$, а когато е по-близо до долната – $CPL = (\bar{X} - LSL)/3\sigma$, където σ е средноквадратичното отклонение на контролирания показател на процеса.

$$C_{pk} = \text{Min} \{CPU, CPL\}$$

Интерес представлява и индексът k , който дава количествена оценка на нецентрираността на процеса и характеризира степента на приближаване на реалните характеристики на процеса към равнището на неговите потенциални характеристики. Индексът k се изчислява по формулата:

$$k = \frac{2|m - \bar{X}|}{USL - LSL}, \quad 0 \leq k \leq 1, \quad m = 1/2 (USL - LSL)$$

Фактори влияещи върху оценката на процесите.

При определяне на показателите за възможностите на процесите трябва да се вземат предвид следните фактори, от които зависи точността на оценката:

- Закон на разпределение на контролирания показател на процеса;
- Обем на извадката за контрол;
- Точност на контролно-измервателното средство.

В повечето случаи се прилагат директно зависимостите за нормалния закон на разпределение, без да се проверява вида на закона. Този подход може да доведе до сериозни

грешки при оценката на процесите. Така например почти всички отклонения на формата и разположението се подчиняват на закона на Вейбул или на логонормалния закон (изключение са коаксиалност и биене, за които се дава закона на Релей). Използването на логонормалния закон изисква по-опростени пресмятания и се предпочита пред закона на Вейбул. Показателят C_{pk} при логонормален закон се определя:

$$C_{pk} = \frac{\ln(USL - x_o) - \mu_y}{3\sigma_y},$$

$$\mu_y = \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{s^2}{(\bar{x} - x_o)^2} \right),$$

$$\sigma_y^2 = \ln \left(1 + \frac{s^2}{(\bar{x} - x_o)^2} \right),$$

където: $y = \ln(x)$, x_o е стойността, спрямо която се определят отклоненията x_i , респ. средноквадратичното отклонение s и средноаритметичното $\bar{x}$ на контролирания показател на процеса.

За съпоставимост на оценките между процеси с нормално разпределение и други видове разпределения се използват зони на разсейване с еднакъв процентил. При $V=6\sigma$ за нормално разпределение процентилите са 0,135 и 99,865, които се използват за определяне на V и при не гаусовите разпределения.

Върху точността на оценката на процесите, а следователно и върху показателите C_p и C_{pk} оказват влияние точността на измервателното средство, т.е. неопределеността на измерване на отделните стойности x_i и обема n на извадката, подложена на контрол.

Неопределеността на измерването, като параметър свързан с резултатите от измерване, който характеризира разсейването на стойностите, които могат да бъдат приписани на измерваната величина може да се изрази чрез средноквадратичното отклонение на измерване, т.е. чрез стандартната неопределеност u .

Закона на разпределение при сумирането на двете случайни величини, подчинени на нормален закон на разпределение – параметъра на качеството и резултата от измерването му е също нормален закон с дисперсия:

$$\sigma^2 = s_T^2 + u^2 + 2rs_Tu,$$

където: s_T е експерименталното средноквадратично отклонение; u – неопределеност; r – коефициент на корелация.

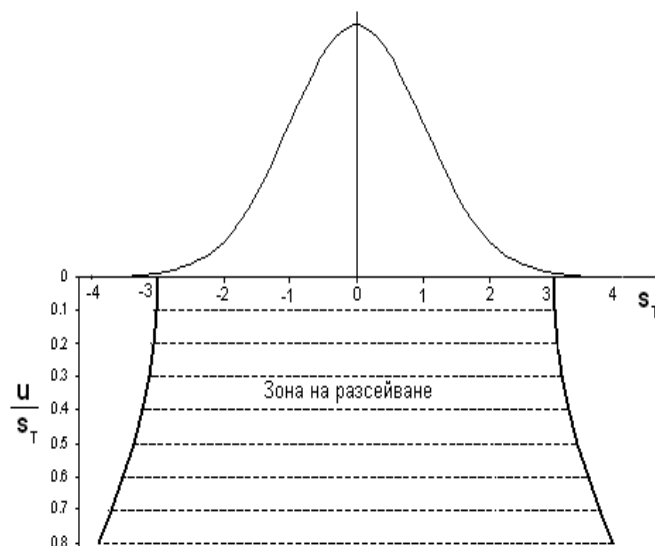
Ако стойността на показателя на качеството и резултата от измерването са независими случайни величини, т.е. $r = 0$, то средноквадратичното отклонение на резултантния закон на разпределение ще бъде:

$$\sigma = \sqrt{s_T^2 + u^2},$$

а зоната на разсейване:

$$V = 6\sqrt{s_T^2 + u^2}$$

На фиг.13 е показано влиянието на неопределеността чрез отношението u/s_T върху зоната на разсейване.



Фиг. 13. Влияние на неопределеността върху зоната на разсейване.

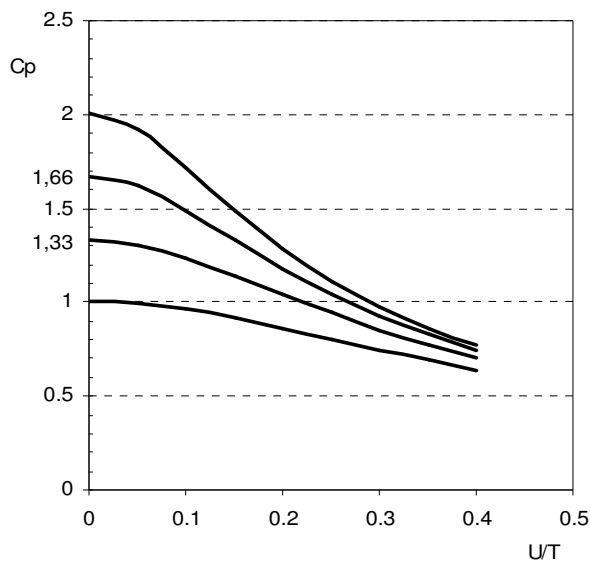
При оценка на възможностите на процеса трябва да се отчита неопределеността на измерване, тъй като тя очевидно оказва влияние на зоната на разсейване.

В таблица 1 са дадени някои стойности на индексът C_p при различни съотношения на разширената неопределеност на измерване $U=2u$ към допуса T , а на фиг.14 – зависимостта на C_p от U/T .

Таблица 1. Влияние на U върху C_p .

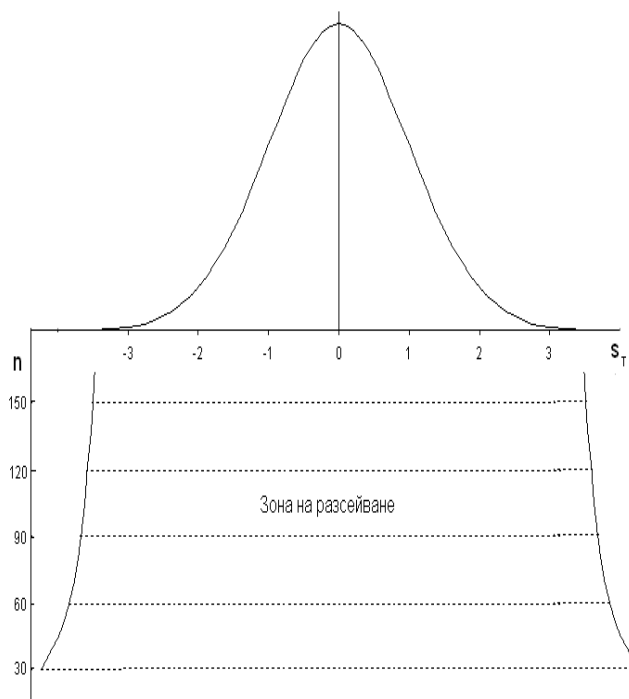
U/T	C_p		
0	1	1,33	1,66
0,1	0,96	1,24	1,49
0,2	0,86	1,04	1,18
0,3	0,74	0,85	0,99

Например при $C_p = T/6s_T = 1,33$, ако неопределеността на измерване е $U = 0,3T$ индексът C_p става по-малък от 1, т.е. процесът може да се оцени като нестабилен само поради ниска точност на измерване.



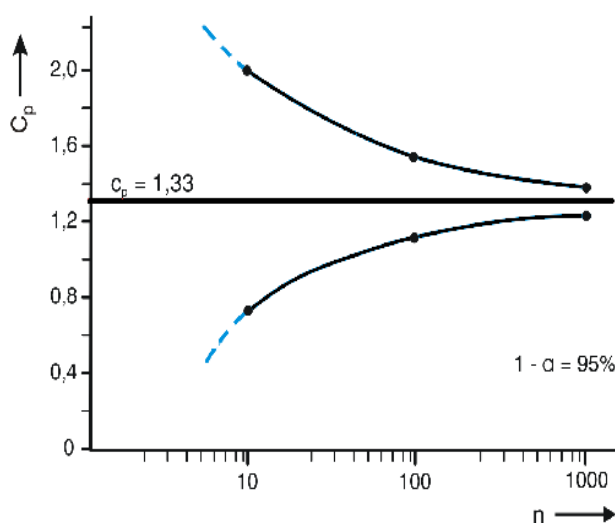
Фиг. 14. Зависимост на C_p от неопределеността на измерване.

Върху зоната на разсейване влияе и обема n на извадката, подложена на наблюдение. Границите на доверителния интервал на експерименталното средноквадратично отклонение ($s_T \pm s_T q_{\gamma, n}$) зависят от обема на извадката n и приетата доверителна вероятност γ . На фиг.15 е показана зависимостта на горната граница на зоната на разсейване от обема на наблюдаваната извадка при $\gamma=0,95$.



Фиг. 15. Зона на разсейване в зависимост от обема на извадката n .

На фиг.16 е дадена зависимостта на доверителния интервал на C_p от обема на извадката n , която показва силно влияние на този параметър върху оценката на процеса.



Фиг. 16. Доверителен интервал на C_p .

Показателят C_{pk} се влияе по аналогичен начин от точността на измерването (U) и обема на извадката n .

Оценката на процесите е важен елемент от осигуряването на качеството. За водещи отрасли като автомобилостроенето показателите за възможностите на процесите са основен критерий за качеството на продукцията и за избор на доставчика. Коректното определяне на тези показатели е от полза и за двете страни – доставчик и производител и в крайна сметка за крайния потребител.

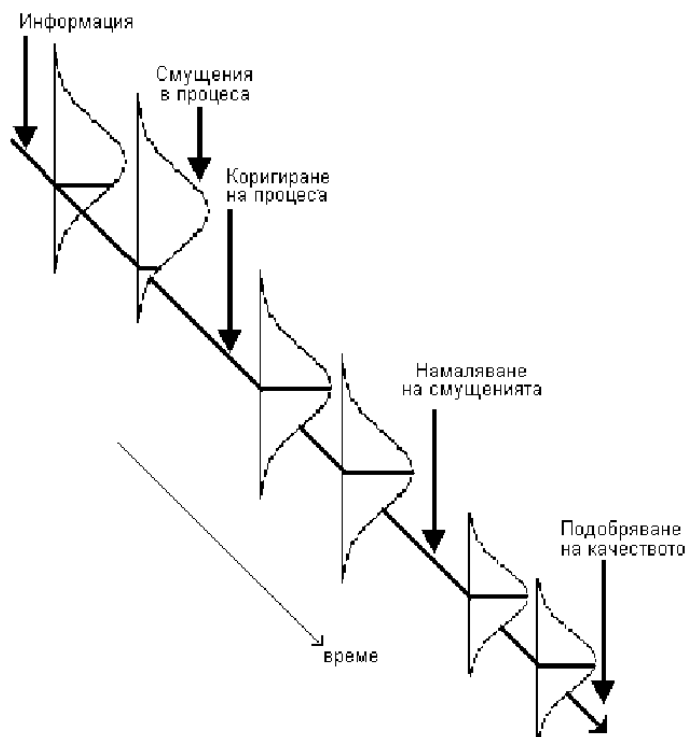
От направения анализ се вижда, че основните фактори за точността на оценката на процесите са: вида на разпределението на контролирания показател; обема на контрола и точността на контролноизмервателните средства.

Представените аналитични и графични зависимости ясно показват влиянието на неопределеността на измерването и обема на извадката за контрол върху показателите за възможностите на процесите. С тяхна помощ могат да се решават конкретни задачи при метрологичното осигуряване на качеството:

- избор на контролноизмервателни средства при зададена достоверност на контрола (напр. чрез рисковете на производителя и потребителя);
- определяне на обема на контролираните извадки при известна неопределеност на средството за измерване (напр. от калибриране);
- оценка на точността на определяне на показателите за възможностите на процесите.

5.4. Статистически контрол на процеси (SPC)

Статистическият контрол на процесите (SPC - Statistical Process Control) се прилага по време на протичане на технологичния процес с цел неговото проследяване, анализиране и регулиране. Използването на SPC позволява своевременно да се сигнализира при необходимост от коригиране на параметрите на процеса и е предпоставка за своевременно разкриване на причините за влошаване на качеството. Това спомага за намаляване на брака, за подържане на качеството на зададено равнище, както и за неговото повишаване чрез усъвършенстване на технологичния процес (фиг.17)



фиг. 17

При този вид статистически контрол през определен интервал от време се вземат извадки, които се подлагат на контрол, обработват се данните и при необходимост се предприемат коригиращи действия - въздействия се върху процеса чрез неговото регулиране (настройване).

За да бъде ефективен статистическият контрол на процеси е необходимо процесът за който се прилага да бъде стабилен (с добри възможности), т.е. коефициентът на стабилност (индекс на възможностите) да бъде $C_p > 1,33$.

Това налага предварително изследване на възможностите на процеса чрез определяне на статистическите характеристики на разсейването и коефициента на стабилност C_p .

Ефектът от приложението на този вид текущ статистически контрол зависи до голяма степен и от решаването на редица конкретни технологични, организационни и икономически задачи.

Контролните карти са основен инструмент за контрол и статистическо управление на процесите. Получената от подложени на контрол извадки информация за текущото състояние на процеса се използва за оценка на статистическата управляемост на процеса, за необходимостта от коригирането му, за разкриване на влияещи (смущаващи) нормалното протичане на процеса фактори, за оценка на съответствието с изискванията, за прогнозиране на бъдещо развитие на процеса. Първоначално контролните карти са били разработени за използване в промишленото производство, но понастоящем широко се използват в сферата на обслужването и други области. Използват се както от висшите нива на управление, така и непосредствено на работните места. Основно предимство на контролната карта е простота на построяване и използване. Тя служи за своевременен индикатор на състоянието на процеса. Обаче контролната карта е само част от пълна система за анализ на процеса. С нейна помощ може да се установи наличието на определена причина която смущава нормалното протичане на процеса, но за установяването на нейната природа и отстраняването ѝ е необходимо да се проведат независими изследвания.

Честотата на вземане на извадките зависи от производствената мощност на контролирания технологичен процес, времетраенето и стойността на контрола, загубите при допускане на брак, характера на процеса и продукцията и др. Обемът на извадките се определя от съображения за намаляване на разходите за контрол и обикновено се приема $n=4-10$ при контрол по количествен признак и $n>100$ при контрол по алтернативен признак.

Известно е, че поради влиянието на редица случайни въздействия в процеса на формирането на параметрите на качеството, те не са постоянни. Отклоненията на параметъра на качеството могат да бъдат разделени на две групи: *случайни* и *неслучайни*.

Случайни отклонения се получават под въздействието на много относително несъществени дестабилизиращи причини (фактори), присъстващи при нормалното протичане на технологичния процес, например случайни колебания в твърдостта или изходния размер на заготовката, случайни колебания в позиционирането на режещия инструмент и т.н. тези причини се наричат *естествени* или *обичайни*.

Неслучайни отклонения се получават под въздействието на значителни дестабилизиращи причини, които съществено изменят хода на технологичния процес, например пренастройване на машината, нова партида заготовки, повреда в инструмента и т.н. Такива причини се наричат *специфични* или *особени*. Те трябва да бъдат открити навреме и изучени чрез наблюдение и анализ на технологичния процес.

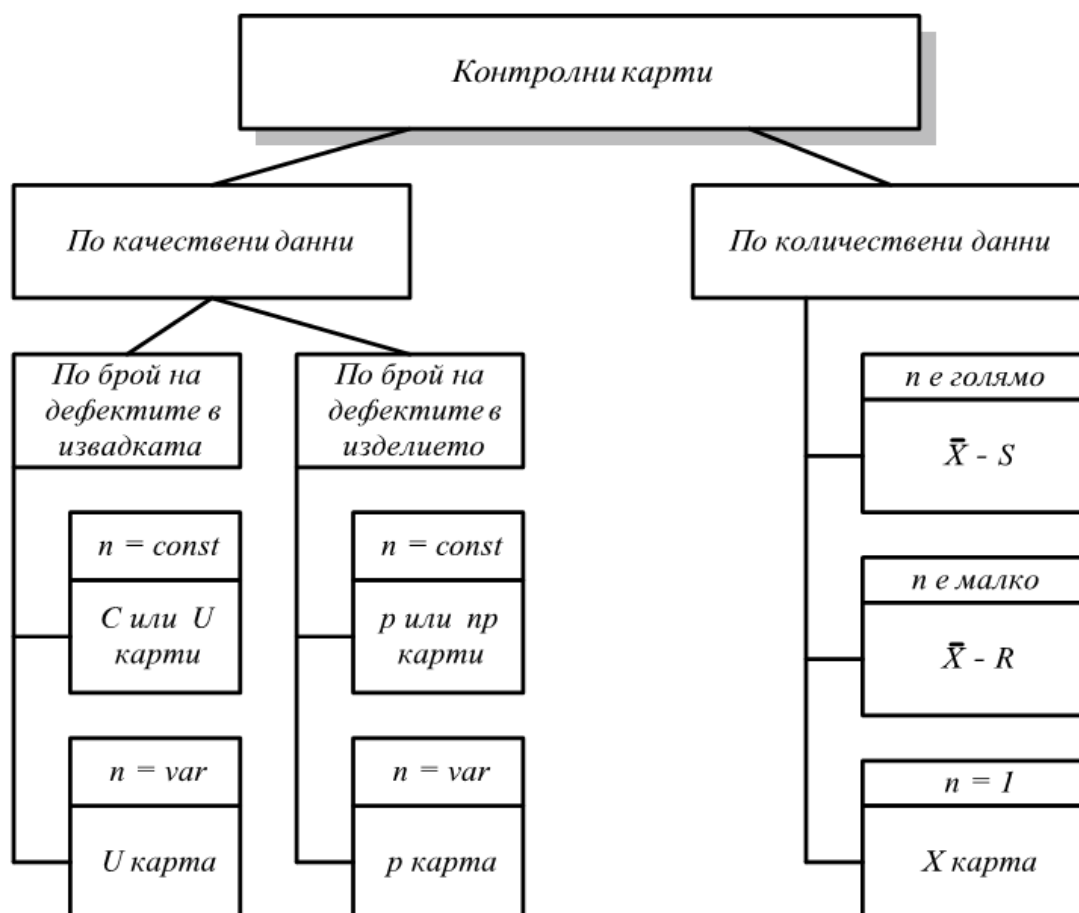
Ако върху процеса въздействат само естествените причини (фактори) измененията в стойностите на показателя на качеството ще бъдат относително малки и с достатъчно устойчив характер. В този случай се счита, че процеса се намира в *статистически устойчиво или управляемо състояние*. Възможно е естествените причини да доведат и до значителни отклонения на показателя на качеството, но вероятността за това е достатъчно малка и на практика такива отклонения са почти невъзможни. Ако процесът се намира в статистически управляемо състояние, може да се предскаже неговото протичане.

Ако върху процеса въздействат специфични (неслучайни) причини, то те извеждат процеса от статистически устойчиво (управляемо) състояние. Показателят на качеството значително променя своята средна стойност или значително се увеличава разсейването, което не може да бъде предизвикано само от естествени (случайни) причини. Такъв процес се нарича статистически неуправляем. Неговото състояние не може да бъде предсказано без информация за специфичните причини довели го до това състояние. Процесът се нуждае от корекция.

Контролните карти могат да бъдат прилагани както за “количествени”, така и за “алтернативни” (“качествени”) данни. Количествени са данните, получени в резултат от наблюдение, извършено чрез измерване на числените стойности на даден показател на качеството. Алтернативните данни са резултати от наблюдение за наличие (или отсъствие) на определен признак (например брой дефекти в извадката).

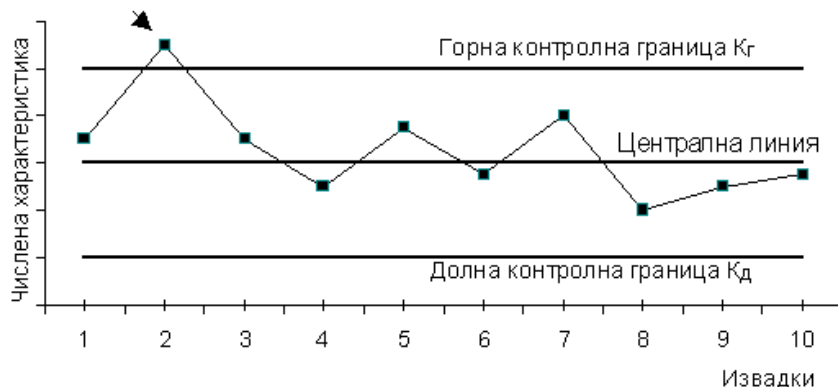
Алтернативните данни са по-малко информативни отколкото количествените. За оценка на дефектността по алтернативни данни е необходимо да се контролират значително повече изделия отколкото по количествени данни. Например ако трябва да се следи процес с ниво на дефектност 1%, е необходим обем на извадките не по-малко от $n=500$. При използване на количествени данни обикновено обема на извадките е от порядъка $n=5$.

Изборът на признака по който ще се осъществява контролът (количествен или качествен) зависи от целите, които се поставят. Препоръчва се винаги когато е възможно да се прилагат контролни карти за количествени признаци. Те съдържат по-богата информация и позволяват да се следи стабилността на технологичния процес и отклоненията на качествения показател от зададената стойност.



фиг. 18

При контролните карти, изследваният качествен показател се свързва с някоя от числените характеристики на разпределението (средноаритметична стойност, медиана, размах, средноквадратично отклонение, брой дефекти, брой дефектни изделия и др.), която се нанася по ординатната ос на контролната карта (фиг.19). По абсцисната ос се нанасят поредните номера на отделните извадки или дискретните моменти от време, в които се извършва контролът. На контролната карта се нанасят още централна линия CL и горната и долна контролни граници (граници на регулиране – K_r и K_d , означавани още с UCL и LCL).



фиг.19 *Контролна карта*

При използване на количествени данни се строят две контролни карти. На едната се нанася числена характеристика на положението (контролна карта на положението), а на другата числена характеристика на разсейването (контролна карта на разсейването). За числени характеристики на положението могат да се използват средноаритметичната стойност (извадкова средна) или медиана. За числени характеристики на разсейването на данните в извадката могат да се използват средноквадратичното отклонение (стандартно отклонение) или размаха. Контролната карта на положението позволява да се оцени изместването на нивото на процеса, а контролната карта на разсейването – измененията в разсейването на контролирания параметър на качеството.

За повечето контролни карти, които използват количествени данни се приема нормално разпределение на данните. По правило, с изключение на някои нетипични случаи, при контролните карти на положение, на които се нанася средноаритметично, изчислено по данни от измерване във всяка моментна извадка с обем n , разпределението на средноаритметичните стойности се доближава до нормалното разпределение, дори в случаите когато отделните наблюдения нямат нормално разпределение. При необходимост преди обработването на данни с различно от нормалното разпределение, те могат да бъдат преобразувани в нормално разпределени (например по метода Вох-Сох).

Когато се използват алтернативни данни се строи само една контролна карта. Например при с-карта (s – брой на дефектите), основана на разпределението на Пуасон, извадковото стандартно отклонение е $s=c^{1/2}$ и няма необходимост от съставянето на втора контролна карта за стандартното отклонение, тъй като то зависи само от c .

Контролните карти могат да бъдат разделени на три основни вида:

- контролни карти на Шухарт (Shewhart) и аналогични на тях
- приемателни контролни карти
- адаптивни контролни карти

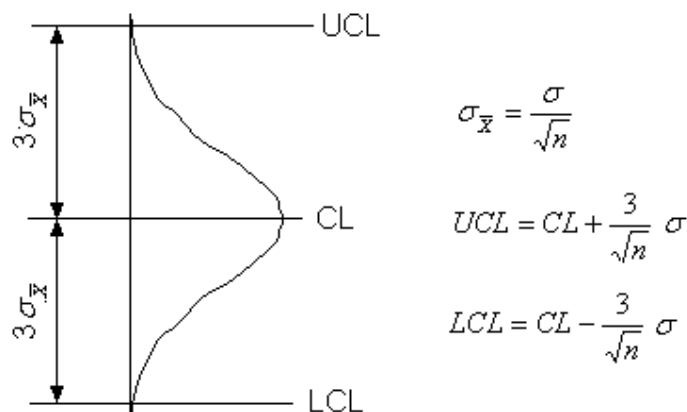
С помощта на *контролните карти на Шухарт* се оценява само намира ли се процеса в статистическо управляемо състояние. Някои разновидности на тези контролни карти могат да се използват и в качеството на средство за приемане на процеса за съответстващ на изискванията.

Приемателните контролни карти са предназначени специално за определяне на критерия за приемане на процеса за отговарящ на изискванията.

С помощта на *адаптивните контролни карти* се регулира процеса посредством планиране на неговата тенденция и извършване на изпреварваща корекция на основата на прогнози.

Контролните карти на Шухарт (ISO 8258) изискват данни, получени чрез наблюдение на параметъра на качество на извадки, взети примерно през равни интервали. Интервалите могат да бъдат зададени или по време (например ежечасно) или по количество продукция. За всяка извадка се определят една или повече статистически характеристики (например средноаритметично, размах). Картата на Шухарт има централна линия CL и контролни граници – горна UCL и долна LCL. При оценка на това дали процеса се намира в статистически управляемо състояние централната линия съответства на средноаритметичното на разглежданите данни. При оценка и на това отличава ли се наблюдаваната характеристика от предварително зададена целева стойност с повече отколкото може да се очаква при въздействие само на случайни причини, за централна линия се използва стойността, установена в технически изисквания или целевата (желаната) стойност. Целевата стойност може да бъде определена и на базата на предишен опит, на базата на икономически съображения и др.

В контролните карти на Шухарт, контролните граници UCL и LCL се използват като средство за определяне на статистически управляемо състояние на процеса. Контролните граници се установяват на нива $\pm 3\sigma$, т.е. отстоят от централната линия CL на три стандартни отклонения на наблюдаваната характеристика. Например при карта за средноаритметичните стойности с централна линия целевата стойност, контролните граници ще бъдат на $\pm 3\sigma_{\bar{x}}$ (фиг.20). Ако се приеме, че разпределението на средните стойности е нормално, то в тези граници ще попаднат 99,73% от средните стойности, а 0,27% ще бъдат извън тези граници. По чисто случайни причини излизането на точки извън контролните граници е практически невъзможно. Рискът за допускане на грешка от първи род (погрешно да се счита че е възникнало изместване на процеса) е $\alpha=0,0027$. При тези карти рискът за допускане на грешка от втори род β (да се пропусне действително изместване на процеса) е значително по-голям. Например ако е възникнало изместване на процеса от целевата стойност с едно стандартно отклонение и обема на извадката е 5, то $\beta=0,777$. Обаче едно от предимствата на контролните карти на Шухарт е ниската чувствителност към сравнително неголеми измествания на нивото на процеса, които в повечето практически случаи са маловажни. Най-често излизането извън контролните граници е свързано със съществени неслучайни изменения в протичането на процеса. Излизането извън контролните граници означава, че върху процеса въздейства значително специфично (систематическо) смущение, което е извело процеса от статистически устойчиво състояние.

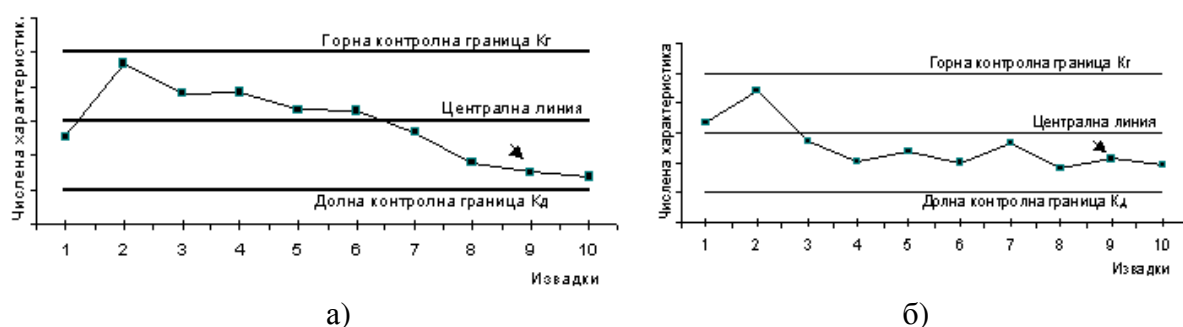


фиг.20

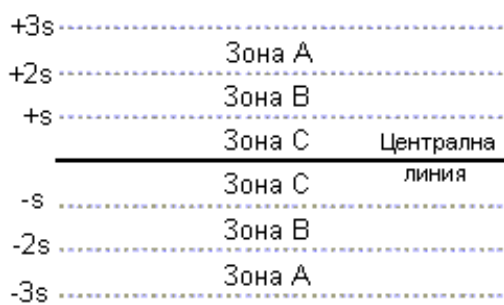
Когато централната линия CL е определена като средноаритметичното на средните стойности в извадките $\bar{\bar{X}}$, и за оценка на разсейването се използва извадковото средноквадратично отклонение s , то контролните граници отстоят от централната линия на величината $\pm \frac{3}{c_n \sqrt{n}} s$.

Понякога, при необходимост от по-висока чувствителност към малки изменения на процеса, се използват предупредителни граници на ниво $\pm 2\sigma$.

Ако производственият процес се намира в нормално състояние, средноаритметичните стойности на извадките са независими и са разпределени по нормален закон, шансът извадковото средно да попадне над или под централната линия ще бъде 50%. Тогава вероятността извадковите средни за две последователни извадки да се окажат над централната линия ще бъде $0,5 \cdot 0,5 = 0,25$. А вероятността извадковите средни на девет последователни извадки да бъдат от едната страна на централната линия ще бъде 0,00195. Това е стойност, приблизително равна на вероятността извадковото средно да попадне извън контролните граници. Затова в качеството на друг индикатор за разстройване на процеса може да се разглежда ситуацията, при която 7-9 последователни точки от контролната карта се намират от едната страна на централната линия. Смушения в процеса има и когато стойностите са между контролните граници, но осем или повече последователни стойности очертават тенденция на увеличаване или намаляване в посока към една от контролните граници. Тези състояния показват наличие на специфични смушения, които могат да предизвикат неуправляеми изменения в процеса и са сигнал за влошаване на качеството. Процесът следва да бъде спрян, да се разкрият причините за смушенията в него и да се предприемат коригиращи действия.



фиг.21 Сигнали за смушения в процеса

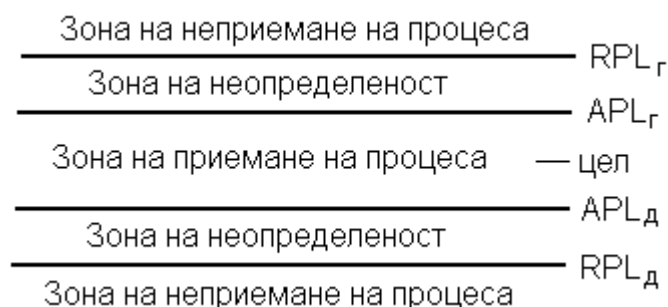


фиг. 22

Областта на контролната карта между централната линия и контролните граници може да се раздели на три зони – А, В и С. Зона А се разполага от 2s до 3s от двете страни на централната линия. Зона В е областта, отстояща от централната линия на разстояние от 1s до 2s, а зона С е разположена от двете страни на централната линия на разстояние s. Попадането

на 2 от 3 последователни точки в зона А може да служи за предупреждение за започващо разстройване на процеса. Попадането на 4 точки от 5 последователни извадки в зона В също може да се използва за ранен сигнал за възможно започване на разстройване на процеса. Попадането на 15 последователни точки в зона С (от двете страни на централната линия) показва по-ниска от очакваната изменчивост на процеса.

Приемателните контролни карти позволяват едновременно да се решат две задачи: 1) намира ли се процеса в статистически управляемо състояние; 2) може ли да се очаква, че продукцията ще отговаря на изискванията. Особеност на приемателните контролни карти за разлика от картите на Шухарт е че процесът може да протича на различни нива¹ в границите на определена зона, определена с отчитане на нормираните изисквания за качество. Допуска се, че някои причини могат да предизвикат изместване на нивото на процеса от целевата стойност, но ако това изместване е малко спрямо установените изисквания, то корекция в хода на процеса е икономически нецелесъобразна. Излишното регулиране на нивото на процеса до целевата стойност води до по-големи разходи и може да увеличи изменчивостта на процеса. От друга страна може да се окаже, че изместването е значително и е необходимо навреме да бъде открито. В такива случаи е важно да се обърне внимание на риска β . Едно от предимствата на приемателните контролни карти се състои в отсъствието на излишно управление, т.е. ненужни корекции в процеса, когато той протича в удовлетворително състояние от гледна точка на осигуряване на нормираните изисквания (допуска). С тези контролни карти освен, че може да се установи намира ли се процеса в статистически управляемо състояние, може да се вземе решение за приемане на процеса като удовлетворяващ предявените към него изисквания за осигуряване на желаното качество.



фиг.23

Доколкото е невъзможно да има една граница, рязко разделяща удовлетворителното от неудовлетворителното качество, е необходимо да се определи такова ниво на процеса, при което той да бъде приет с вероятност $(1-\alpha)$. Това е така нареченото *приемливо ниво на процеса* APL – осигуряващо $p_0\%$ несъответстваща продукция (p_0 е допустимата дефектност). Освен това е необходимо да бъде определено такова ниво на процеса, при което той да бъде признат за неприемлив с вероятност $(1-\beta)$. Това е така нареченото *неприемливо ниво на процеса* RPL – осигуряващо $p_1\%$ несъответстваща продукция (p_1 е недопустимата дефектност).

$$APL_z = USL - z_{1-p_0} \cdot \sigma$$

$$RPL_z = USL - z_{1-p_1} \cdot \sigma$$

$$APL_o = LSL + z_{1-p_0} \cdot \sigma$$

¹ Под ниво на процеса (централна линия) се разбира неговата средна стойност за такъв период от време за който може да се счита за постоянна

$$RPL_o = LSL + z_{1-p_1} \cdot \sigma$$

Ако нивото на процеса е в зоната на приемане, то продукцията резултат от този процес ще има дефектност по-малка от допустимата p_0 . Такъв процес е приемлив. Ако нивото на процеса е в зоната на неприемане, то продукцията резултат от този процес ще има дефектност по-голяма от недопустимата p_1 . Такъв процес е неприемлив. Нивото на процеса може да бъде представено чрез централната линия от контролна карта на Шухарт – например чрез средноаритметичното на средните стойности в отделните извадки. При нива не процеса между APL и RPL (в зоната на неопределеност) качеството на продукцията е гранично и възникват рискове α и β от неправилно вземане на решение относно възможността на процеса да осигури желаното качество.

При приемателните контролни карти контролните граници ACL (горна и долна) се определят в зависимост от приемливото APL и неприемливото RPL нива на процеса и от приетите рискове α и β .

$$ACL_e = APL_e + \left(\frac{z_{1-\alpha}}{z_{1-\alpha} + z_{1-\beta}} \right) (RPL_e - APL_e)$$

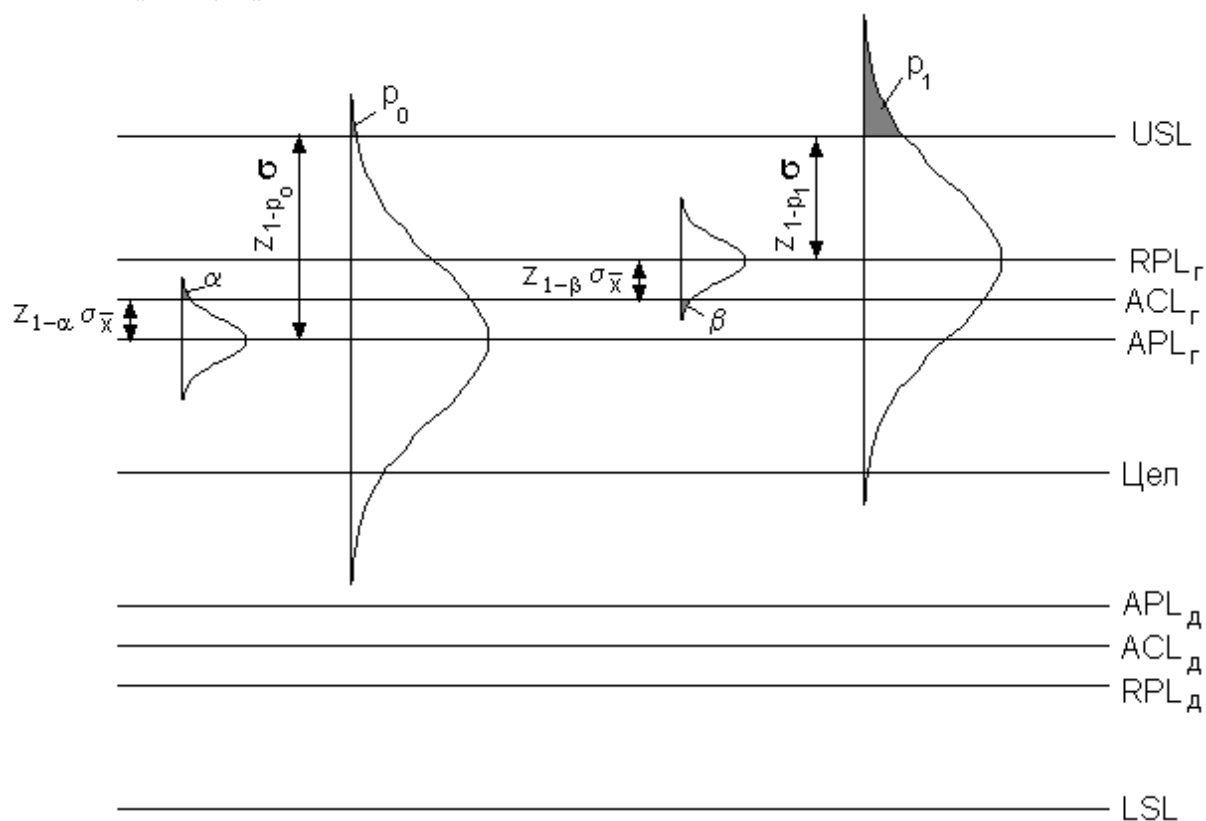
$$ACL_o = APL_o - \left(\frac{z_{1-\alpha}}{z_{1-\alpha} + z_{1-\beta}} \right) (APL_o - RPL_o)$$

$z_{1-\alpha}$, $z_{1-\beta}$, z_{1-p} – квантили на стандартното нормално разпределение

$z_{1-p} = \text{NORMSINV}(1-p)$

Ако рисковете α и β са равни контролните граници ACL са разположени по средата между APL и RPL.

$$z_{1-\alpha} \sigma_{\bar{x}} + z_{1-\beta} \sigma_{\bar{x}} = RPL - APL$$



фиг. 24

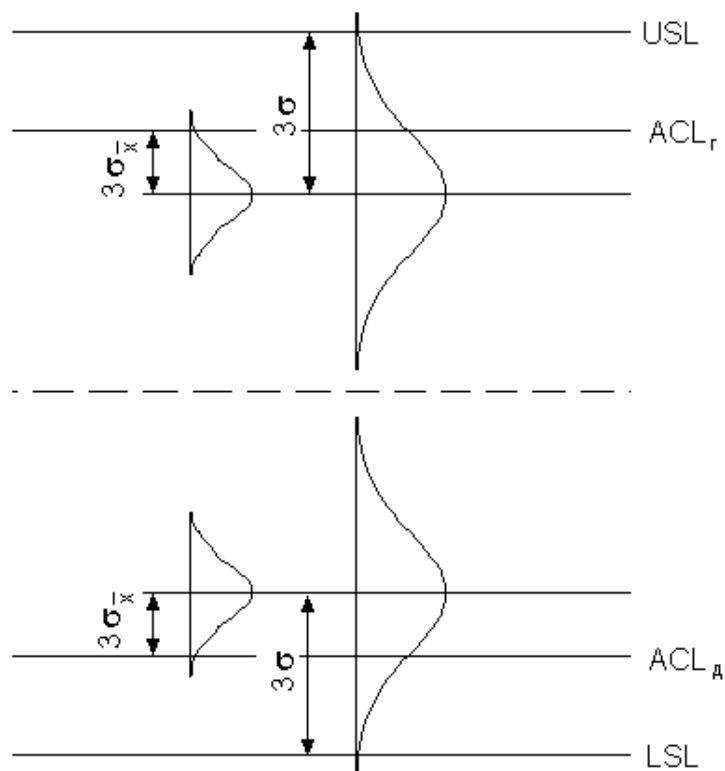
В някои случаи изборът на приемателното ниво на процеса APL може да не бъде пряко свързано с границите на допусковото поле USL и LSL. Опитът показва, че неикономичните и труднорегулируеми причини за измествания на нивото на процеса съответстват на достатъчно тясна зона. Границата на тази зона може да бъде избрана за приемателно ниво на процеса.

Една разновидност е приемателната контролна карта с модифицирани граници, при която контролните граници (наричани още контролни граници по стандартизационни изисквания) се разполагат на разстояние $3(\sigma - \sigma_x)$ от границите на допусковото поле (фиг.25), т.е. при $z_{1-\alpha} = z_{1-\beta} = 3$. Но в този случай не може да се определи риска β .

$$ACL_e = USL - 3\sigma + 3\sigma_x$$

$$ACL_o = LSL + 3\sigma - 3\sigma_x$$

$$\sigma_x = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$



фиг.25

Някои разновидности на контролни карти

Контролни карти за средноаритметичната стойност с предупредителни граници (ISO 7873)

Контролните карти, използващи само контролни граници на регулиране (UCL и LCL) в много случаи не са достатъчно чувствителни към изменение на нивото на процеса. Средният брой извадки, по резултатите от които може да се вземе решение за коригиране на процеса е критерий за чувствителността на контролната карта към изменения на нивото на процеса.

Ако процесът се намира в статистически управляемо състояние, за да не се вземе грешно решение за корекция, следва средният брой извадки, по резултатите от които се взема решение за корекция да бъде възможно голям.

Ако процесът е излязъл от статистически управляемо състояние, то решение за неговата корекция е необходимо да се вземе колкото се може по-бързо, т.е. средният брой извадки, по резултатите от които се взема решение за корекция, трябва да бъде възможно малък.

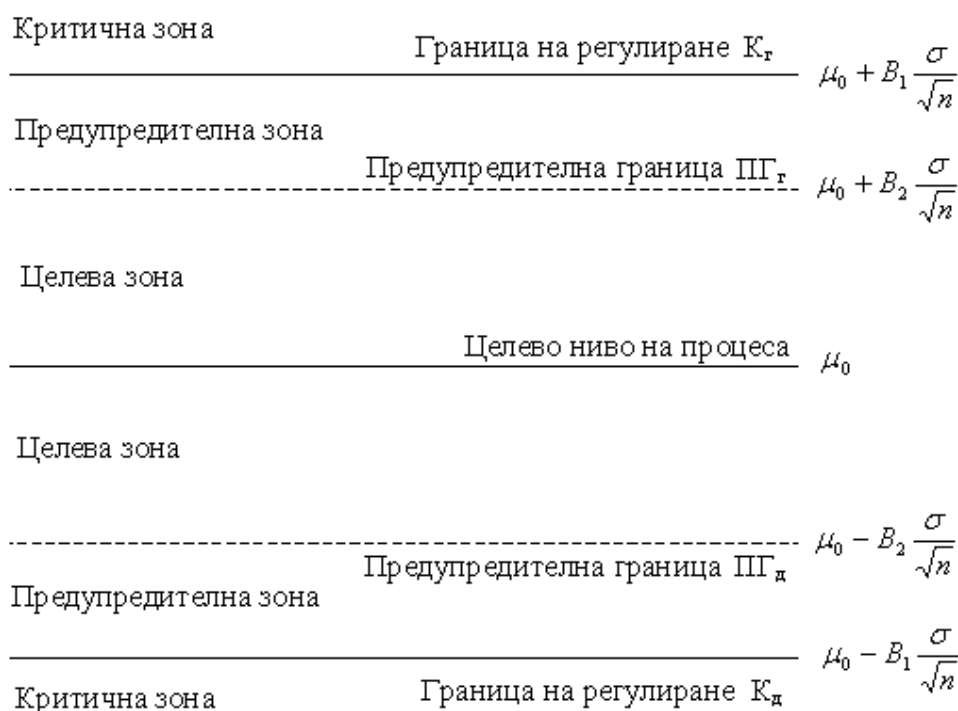
Въвеждането на предупредителни граници повишава чувствителността на контролната карта към състоянието на процеса.

Неизвестната стойност на математическото очакване μ на извадковото средно $\bar{X}$ характеризира текущото ниво на процеса. Сигнал за необходимост от корекция на процеса е недопустимото изменение нивото на процеса от целевата стойност μ_0 , например $\mu > \mu_1$, където μ_1 е недопустимото изместване на процеса.

Недопустимото изместване на процеса μ_1 може да бъде определено, ако са известни границите на допусковото поле USL, LSL и делът на несъответстващите единици продукция q_1 за процес в статистически неуправляемо състояние.

$$\mu_1 = USL - \sigma \cdot z_{1-q_1} = USL - \sigma \cdot NORMSINV(1 - q_1) \text{ или}$$

$$\mu_1 = LSL + \sigma \cdot z_{1-q_1} = LSL + \sigma \cdot NORMSINV(1 - q_1)$$



фиг. 26 Контролна карти за средноаритметичната стойност с предупредителни граници

При избора на план за статистическо управление на процеса трябва да бъдат определени следните стойности:

- обем на извадката n
- периодът от време през който се вземат извадките
- минималният брой K на последователните точки, попаднали в предупредителната зона, за вземане на решение за корекция на процеса
- коефициентите B_1 и B_2 , определящи разположението на границите на регулиране и предупредителните граници ($B_1=2,75$; 3 ; $3,25$)
- средният брой извадки L_0 и L_1 , съответно в статистически управляемо и в статистически неуправляемо състояние.

Ефективността на процедурата за статистическо управление на процеса може да бъде оценена чрез средния брой извадки ARL, необходим за получаване на сигнал за неуправляемо състояние на процеса. ARL има максимална стойност, когато нивото на процеса съвпада с целевата стойност μ_0 , и рязко се намалява когато нивото на процеса се отклонява от целта. Контролната карта трябва да бъде разработена така, че да бъдат изпълнени следните две условия:

- при съвпадане нивото на процеса с целевата стойност μ_0 средния брой извадки L_0 трябва да бъде голям (ARL е означено с L_0). Това ще осигури малка вероятност за възникване на лъжливи сигнали за излизане на процеса от статистически управляемо състояние.
- при ниво на процеса равно на недопустимото μ_1 , средният брой извадки, означен с L_1 , трябва да бъде малък за да позволи бързо откриване на неудовлетворително състояние на процеса.

Средният брой извадки ARL може да се определи по формулата:

$$ARL = \frac{1 - q'}{1 - q' - q' q''},$$

където $q' = NORMSDIST(B_2 - \delta\sqrt{n})$ е вероятността за попадане в целевата зона;

$q'' = NORMSDIST(B_1 - \delta\sqrt{n}) - NORMSDIST(B_2 - \delta\sqrt{n})$ е вероятността за попадане в предупредителната зона.

δ е приведено ниво на процеса:

$$\delta = \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma}.$$

Вероятността за попадане в критичната зона е равна на $1 - q' - q''$.

L_0 се определя по зависимостта за ARL при $\delta=0$, а L_1 – при δ . Съставят се няколко плана за статистическо управление при различни стойности на коефициентите B_1 и B_2 ($B_1=2,75; 3; 3,25$; $B_2=1,25; 1,5; 1,75; 2$) и от тях се избира този, който дава максимална стойност на отношението L_0/L_1 . Ако $L_0/L_1 > 40$ за няколко плана, се препоръчва за се избере този с най-малка стойност L_1 .

Контролна карта на практическите граници

Тази карта е построена на основата на практическите граници на разсейване. Предназначена е за статистическо регулиране на параметри, имащи нормално разпределение и двустранно ограничено допусково поле с граници T_{Γ} и T_{Δ} . Особеност на картата е динамичният характер на контролните граници. Те се определят за всяка извадка в зависимост от обема на извадката n и вероятността γ за включване на определен процент P от стойностите на контролирания параметър в контролните граници.

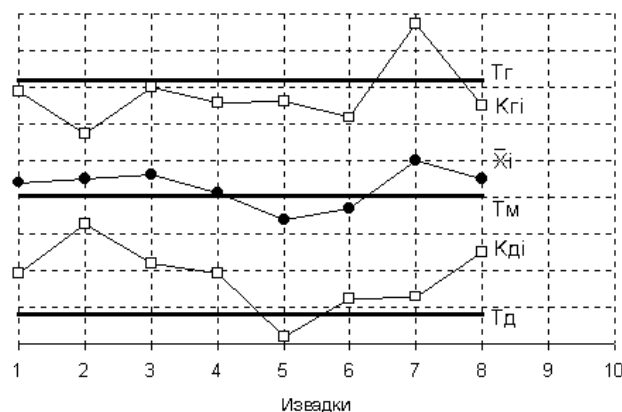
Контролните граници за всяка извадка се пресмятат по зависимостите:

$$K_{\gamma} = \bar{X} + K_s, \quad K_{\delta} = \bar{X} - K_s,$$

където K е коефициент, зависещ от n , γ и P (БДС 11319-90). P и γ най-често се приемат равни на 0,90; 0,95; 0,99.

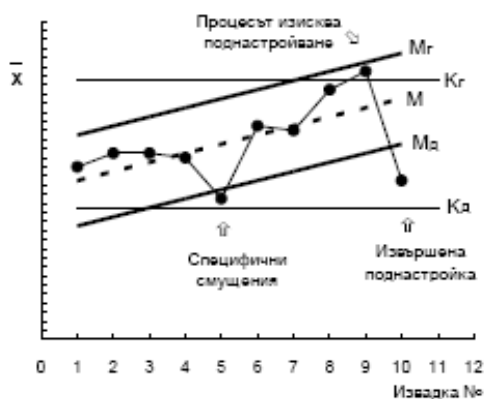
Върху контролната карта се нанасят точките $\bar{X}_i$, $K_{\Gamma i}$ и $K_{\Delta i}$ за всяка извадка и границите T_{Γ} и T_{Δ} и средата T_m на допусковото поле (фиг.27).

По положението на точките $K_{\Gamma i}$ и $K_{\Delta i}$ се съди за разсейването, а на точките $\bar{X}_i$ – за настройката на процеса. Контролираният процес се счита за статистически управляем в случаите, когато в продължение на определен период от време, съответстващ на повече от 5 последователни извадки, точките $K_{\Gamma i}$ и $K_{\Delta i}$ се намират в допусковото поле.



фиг.27 Контролна карта на практическите граници

$\bar{X}$ - карта с "пълзяща средна"



фиг. 27а $\bar{X}$ - карта с "пълзяща средна"

Често изместването на средноаритметичната стойност е присъщо за процеса явление и се дължи на въздействието на доминиращ фактор, например износването на инструмента води до еднопосочно изменение във времето на средната стойност на отделните извадки. В такива случаи използването на карти с "пълзяща средна" позволява да се получи информация както за въздействието на специфични смущения, така и за естествените смущения, предизвикани от въздействието на доминиращия фактор.

Картата за средноаритметичните стойности се разработва на основата на данните от извадките взети в периода между смяната на инструмента. След определяне и нанасяне върху картата на средноаритметичните стойности на отделните извадки се прекарва апроксимираща права M . Върху картата се нанасят контролните граници M_g и M_d , симетрично на правата M , отстоящи на разстояние $A_2 \bar{R}$ от нея. Излизането на средни стойности извън тези граници е сигнал за наличието на специфични (неприсъщи) смущения в процеса.

Върху картата се нанасят и хоризонталните контролни граници K , и K_d . Излизането на средни стойности извън тези контролни граници е сигнал за необходимост от поднастройване или смяна на инструмента.

Контролна карта на кумулативните суми (CUSUM – карта)

При този вид контролни карти се предполага, че са известни средноквадратичното отклонение на процеса σ , стойността X_0 на контролирания параметър, съответстваща на най-доброто качество (целевата стойност).

През определени интервали от време се правят извадки, които се подлагат на контрол и се изчисляват средноаритметичните стойности на всяка извадка $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_i, \dots$. При първата извадка за която $\bar{x}_i$ стане по-голямо от $X_0 + \sigma$ или по-малко от $X_0 - \sigma$ започват да се изчисляват кумулативните суми, сумирайки разликата d_i между текущата стойност $\bar{x}_i$ и $(X_0 \pm \sigma)$, т.е.

$$\text{ако } \bar{x}_i > X_0 + \sigma \quad \text{--->} \quad d_i = \bar{x}_i - (X_0 + \sigma)$$

$$\text{ако } \bar{x}_i < X_0 - \sigma \quad \text{--->} \quad d_i = \bar{x}_i - (X_0 - \sigma)$$

$$\text{CUSUM}_i = d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_i + \dots + d_n$$

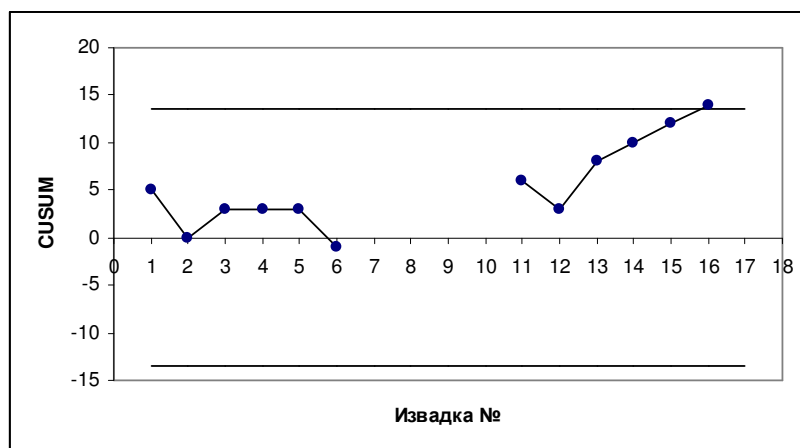
Кумулативните суми CUSUM се нанасят върху картата до тогава докато кумулативната сума не промени своя знак. Контролните граници се поставят на $\pm 2,7\sigma$. При излизане извън контролните граници процеса се счита, че е извън контрол, т.е. нуждае се от настройка.

Контролната карта на кумулативните суми е особено подходяща за откриване на малки, постоянни измествания на процеса, които могат да се окажат трудно забележими при използване на $\bar{X}$ -карта.

Пример: Да се построи контролна карта на кумулативните суми, ако $X_0=100$, $\sigma=5$

$$X_0 + \sigma = 105; \quad X_0 - \sigma = 95; \quad 2,7\sigma = 13,5$$

Извадки №	$\bar{x}_i$	d_i	CUSUM _i
1	110	+5	+5
2	100	-5	0
3	108	+3	+3
4	105	0	+3
5	105	0	+3
6	101	-4	-1
7	96		
8	105		
9	101		
10	101		
11	111	+6	+6
12	102	-3	+3
13	110	+5	+8
14	107	+2	+10
15	107	+2	+12
16	107	+2	+14



Статистически контрол при малки партии

Приложението на статистическия контрол на процесите се затруднява когато се произвеждат малки партии от изделия или процесите са кратки, което е характерно за малките фирми. В такива случаи може да се използват три допълнителни разновидности на контролни карти:

- карта на индивидуалните стойности и абсолютните стойности на последователните разлики;
- карта за малки партии от подобни детайли;
- карта за малки партии с различни характеристики на разпределението.

Карта за индивидуалните стойности и абсолютните стойности на последователните разлики ($x_i / |x_i - x_{i+1}|$)

Когато процесът е кратък в практиката широко се използва контролиране на първия и последния обработен детайл. Ако резултатите от контрола са положителни се счита, че всички изработени детайли са годни. Главният недостатък на такъв контрол е отсъствието на информация за разсейването.

В такива случаи могат да се използват традиционните контролни карти, но вместо средните стойности за извадки от n детайла, се нанасят индивидуалните стойности. За изчисляването на контролните граници е необходима стойността на размаха, която се определя чрез последователните разлики $|x_1 - x_2|$; $|x_2 - x_3|$ и т.н. Статистически характеристики на картата са индивидуалните стойности x_i (обем на извадките $n=1$) и абсолютните стойности на последователните разлики $|x_i - x_{i+1}|$ (ISO 8258). Средната на индивидуалните стойности и размахът се определят от формулите:

$$\bar{X} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i; \quad \bar{R} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k |x_i - x_{i+1}|$$

където k е броят на индивидуалните стойности.

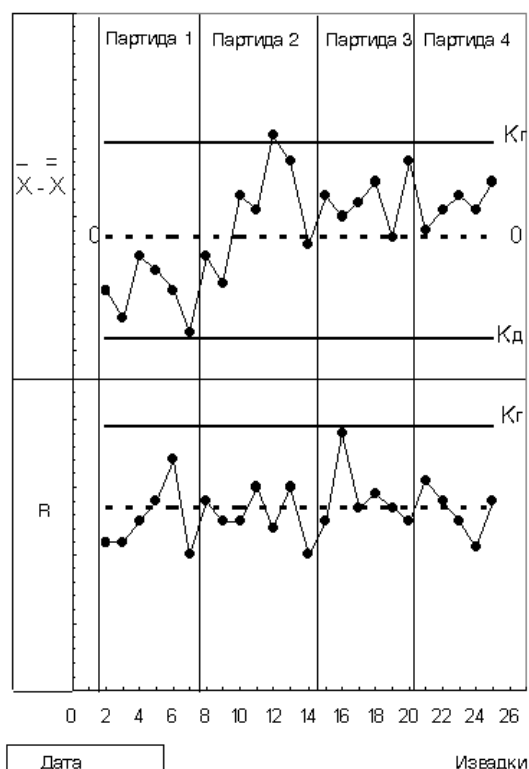
Контролните граници за индивидуалните стойности са $\bar{X} \pm \frac{3}{d_n} \bar{R}$, а за размахът $\pm 3,267 \bar{R}$.

Контролни карти за индивидуалните стойности могат да се използват и в случаите, когато контролът е скъпоструващ или продължителен и икономически не е изгодно обемът на извадките да е повече от 1 (например при разрушителен контрол на скъпо изделие).

Контролна карта за малки партии от подобни детайли

Много често на дадена машина се обработват последователно малки партии от подобни детайли. Типичен случай е струговането или шлифоването на детайли с различни диаметри. Когато разликата в диаметрите не е много голяма разсейването на размерите на обработените детайли в отделните партии е приблизително еднакво. Тъй като контролните карти не се основават на допуските, които в случая са различни, те лесно биха могли да се модифицират така, че параметрите на детайлите от различните партии да се използват за статистическа обработка с една контролна карта.

Най-лесният начин за решаването на тази задача е да се използват отклоненията от номиналния размер или размера на настройване, вместо абсолютните стойности на размерите. Това означава да се съставят контролните карти за средните стойности спрямо нулева средна линия. Следващите процедури за разработването на контролните карти са идентични с тези при конвенционалните карти. За извършване на коректен анализ на контролните карти е необходимо да се означат върху тях границите на отделните партии от детайли.



фиг. 29 - Контролна карта за малки партии от подобни детайли

При съставянето на контролните карти за малки партии от подобни детайли се използва следният ред:

- За всяка партида от детайли се определя средната стойност $\bar{X}$ на контролирания параметър. Върху контролната карта средната линия се означава като нулева.

- За всяка извадка с обем n се определя средната стойност $\bar{X}$ и върху картата за средните стойности се нанасят разликите $\delta\bar{X} = \bar{X} - \bar{\bar{X}}$.

- Върху картата за размаха се нанасят както обикновено стойностите за размаха на всяка извадка.

- Определят се контролните граници:

$$K_e = +A_2 \bar{R}; \quad K_o = -A_2 \bar{R}.$$

Контролната граница за размаха се изчислява по формулата: $K_e = D_4 \bar{R}$.

- Върху контролните карти се отбелязват ясно границите между отделните партии.

На фиг.29 е дадена контролна карта за малки партии от подобни детайли.

Контролна карта за малки партии с различни характеристики на разпределението

Тази карта е подобна на предната и се използва в случаите когато разсейването на контролирания параметър за отделните малки партии се различава значително. За всяка извадка се изчисляват изразите $(\bar{X} - \bar{\bar{X}})/\bar{R}$ и получените стойности се нанасят върху картата за "средните стойности" спрямо подходящо избрана средна (нулева) линия. Изчисляват се и отношенията $R/\bar{R}$ за всяка извадка, и се нанасят върху картата за размаха.

Друг възможен път за подобряването на качеството, когато партидите са малки или процесите са кратки, е да се следи за състоянието на технологичното оборудване, чрез анализ

на параметрите на процеса (вибрации, температура, деформации и др.), вместо да се следят параметрите на изделиято. Този метод често дава много добри резултати, но изисква разработването на цялостна система за диагностичен контрол, която включва редица специализирани средства за контрол на състоянието на производствената екипировка.

Анализ на временни редове

Анализът на временни редове е набор от методи за изучаване на група наблюдения, извършени последователно във времето. Тези методи включват:

- графично изобразяване на временния ред чрез нанасяне на стойността на наблюдаваната величина по едната ос и момента от време по другата ос
- разкриване на общата тенденция на изменение във времето на наблюдаваната величина
- определяне на цикличността на реда за разкриване на факторите, които могат да повторят своето влияние в бъдеще
- използване на статистически инструменти за прогнозиране на бъдещи стойности на изучаваната характеристика или за разкриване на причините, които предизвикват нейните отклонения.

Данните в реда обикновено съдържат систематична съставляваща (най-често включваща няколко компоненти) и случаен шум, който затруднява откриването на регулярната компонента. Анализът на временни редове се състои във филтрация на шума, което позволява по-ясно и отчетливо да се открие регулярната съставляваща. Най-често регулярната съставляваща включва както обща систематична линейна или нелинейна компонента, изразяваща общата тенденция, така и периодически повтаряща се (циклична) компонента.

Първата стъпка за разкриване на общата систематична компонента (обща тенденция - не случайна функция, формирана под действие на дълговременна тенденция) е заглаждането. То се извършва чрез локално усредняване на данните и може да стане по метода на пълзяща средна, пълзяща медиана, експоненциално заглаждане или по метода на най-малките квадрати. По този начин се филтрира шума и данните се преобразуват в относително гладка крива.

При метода на пълзяща средна всеки член на реда се заменя със средното на l съседни члена (интервал с дължина l):

$$MA_i(l) = \frac{1}{l} \sum_{t=(i-l)/2}^{(i+1)/2} Y_t$$

Вместо средни стойности могат да се използват стойностите на медианата. Основно предимство на медианното заглаждане е това, че резултатите са по-устойчиви към резки отклонения в стойностите на членовете на реда (свързани например с грешки при измерването), попадащи в интервала на заглаждане. В резултат на това се получава по-гладка крива. При метода на пълзяща средна резултатите силно зависят от интервала на заглаждане. При избора на малки интервали за редове със значителен шум трудно може да бъде открита общата тенденция, а избора на големи интервали е съпроводен със загуба на данни. Освен това при този метод не се отчита влиянието на стойностите от реда, отстоящи от разглежданата точка на повече от $(l-1)/2$ временни интервала.

При метода експоненциално заглаждане се използват експоненциално претеглени пълзящи средни по целия ред, т.е. загладената стойност в коя да е точка от реда е функция на всички предшестващи стойности. Отчитат се всички предшестващи наблюдения – предното се отчита с максимална тежест, по-предното – с по-малко тегло, а най-старото наблюдение влияе на резултата с минимално статистическо тегло. Алгоритъмът за пресмятане на стойностите в коя да е точка i от реда се базира на три величини: наблюдаваната стойност Y_i

в точка i от реда; пресметнатата заглаждана стойност E_{i-1} за предишната точка и един предварително избран коефициент на заглаждане w , постоянен за целия ред:

$$E_i = wY_i + (1 - w)E_{i-1}$$

От значение е изборът на коефициента на заглаждане w , който в значителна степен влияе на резултатите. За съжаление обективен критерий за избора на w няма. Коефициента на заглаждане w може да приема стойности в диапазона $0 < w < 1$, но обикновено се избира от 0,2 до 0,5. При големи стойности на w по-голяма тежест има текущата стойност на реда, а при малки стойности на w – по-голяма тежест имат предходните стойности.

Методът експоненциално заглаждане освен за откриване на систематичните съставляващи в реда може да бъде използван за краткосрочни прогнози с един период напред.

Когато се цели откриването в реда само на общата тенденция, както и когато шумовата компонента в реда е голяма (грешките от измерване са големи) се използва методът на най-малките квадрати. При използване на линеен модел не може да бъде открита цикличност в реда.

Периодично повтарящата се (циклична) компонента може да бъде определена чрез автокорелационната зависимост между членовете на реда – корелационната зависимост между всеки $i^{\text{ти}}$ елемент и $(i-k)^{\text{ти}}$ елемент на реда. Ако шумът не е голям, то и периодично повтарящата се компонента може да се определи визуално, разглеждайки поведението на членовете на реда след експоненциално заглаждане или заглаждане по метода на пълзяща средна през всеки k интервали от време.

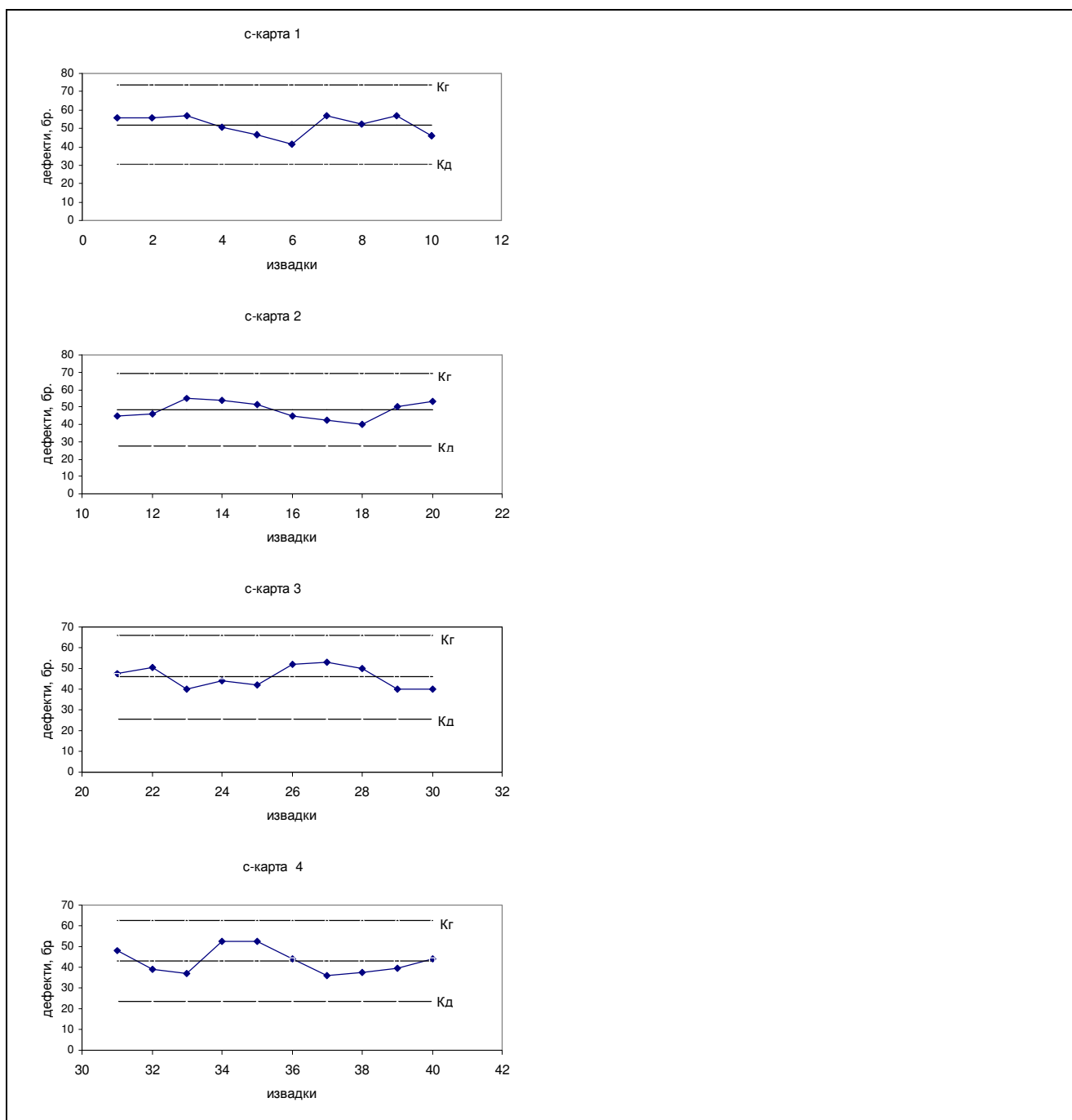
Мощен и гъвкав метод, много популярен за построяване на прогнози е методът авторегресия и пълзяща средна (ARIMA). Той включва както параметри на авторегресия, така и параметри на пълзяща средна. При авторегресията всяко наблюдение се разглежда като сума на случайни въздействия и линейна комбинация на предишните наблюдения, докато при пълзяща средна всяко текущо наблюдение се представя като сума от случайни въздействия в дадения момент и линейна комбинация от случайни въздействия в предишните моменти от време. В сравнение с останалите методи методът ARIMA е по-сложен и изисква значителна практика за усвояването му в прогнозирането.

Като мярка за качествата на модела може да се използва средното абсолютно отклонение MAD или остатъчната сума на квадратите. При регресионни модели надежден показател за адекватност на модела е дисперсията. Сравняването на дисперсиите на два модела се извършва чрез проверка на статистически хипотези по критерия на Фишер.

Ако временният ред не съдържа значителен шум, устойчиво нарастваща или устойчиво намаляваща тенденция може лесно да бъде визуално открита и само чрез графичното представяне на реда.

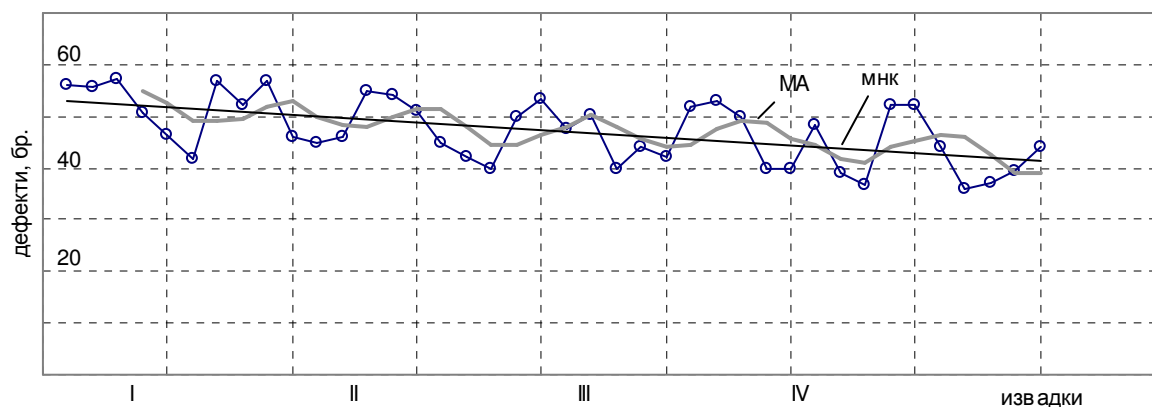
Приложение на временните редове в управлението на качеството

За проследяване на измененията във времето на стойностите на показателите на качеството на един продукт или процес в практиката широко се прилагат различни видове контролни карти. Те се явяват основен инструмент за своевременно сигнализиране за наличие на моментни смущения в процеса и за необходимост от въвеждането на коригиращи действия за неговото стабилизиране. Използват се за текущ статистически контрол на процесите (SPC – Statistical Process Control) като оперативно средство, което позволява операторът да реагира на всеки сигнал за изменение на процеса в неблагоприятна посока. На една контролна карта се съдържа информация за кратък период от време. Ако данните за наблюдаваната характеристика на процеса от поредица контролни карти се обединят ще се получи временен ред, от анализа на който може да се извлече информация за измененията на процеса за продължителен период от време и тя да се използва както за подобряване на неговите характеристики, така и за прогнозиране на състоянието му в бъдеще.



фиг.30

На фиг.30 са показани четири последователни контролни карти за броя на дефектите, а на фиг.31 е показан временен ред, получен от обединяването на тези контролни карти, от който може да се установи обща тенденция за намаляване на броя на дефектите (права *мнк* , прекарана по метода на най-малките квадрати), а от кривата *МА* (пълзяща средна) може да се определи цикличността.



фиг.31

Таблица 2. Приложения на временните редове в управлението на качеството

Метод	Характеристика	Приложения в управление на качеството
Пълзяща средна (медиана), Експоненциално претеглена пълзяща средна	Най-простия модел за прогнозиране на временни редове.	Прогнозиране на процеси (SPC). При диагностика и контрол на технически средства. Планиране на ремонт, калибриране (MSA).
Корелационен анализ	Намиране на съществените периодични зависимости и съответните закъснения в ред (автокорелация) или между няколко реда (кроскорелация).	За анализ на един или няколко взаимно свързани процеса (SPC).
Авторегресия и пълзяща средна (ARIMA)	Описание на процеси с еднородни колебания при случайни въздействия и голямо разсейване.	За прогнозиране на развитието на процеси (SPC). При диагностика и контрол на технически средства. За планиране на ремонт, калибриране (MSA).
Комплексни модели с авторегресия и пълзяща средна	При няколко свързани (корелирани) реда с колебания предизвикани от една и съща причина.	За прогнозиране на няколко взаимно свързани процеса.
Спектрален (Фурие) анализ	Намиране на периодичните съставляващи на временния ред с различна дължина.	За анализ на процеси с цикличен характер (SPC). Диагностика и контрол на технически средства (MSA).
Сезонен (цикличен) модел	При редове с ясно изразена линейна тенденция.	За прогнозиране на процеси със систематичен и цикличен характер. SPC на процеси и осигуряване на измервателни средства (MSA).

Временните редове се използват предимно в икономическото прогнозиране. Освен за анализ и прогнозиране на процеси като продължение на SPC временните редове могат успешно да се приложат и в осигуряването на качеството на контрола. Един от проблемите в тази посока е оценката на състоянието и избора на момента за калибриране на контролно-измервателните средства. Прилагането на методите за анализ на измервателните системи (MSA) дават оценка на моментното състояние. Чрез обработка на резултатите от MSA с временни редове може да се прогнозира остатъчният ресурс и срока за следваща проверка или калибриране.

Същият подход може да се приложи при диагностиката на технически средства и системи за планиране на обслужването и ремонта. В таблица 2 са дадени основните характеристики на методите за анализ на временните редове и приложенията им в управлението на качеството.

5.5. Приемателен статистически контрол

Приемателният статистически контрол на качеството (AS - Acceptance Sampling) се прилага за окачествяване на готова продукция с цел да се провери дали са спазени качествените изисквания. При него се използват научно обосновани извадкови планове, чрез които се правят изводи за качеството на целите партии при проверяване само на малка част (извадка) от партидите. Той заменя 100%-товия контрол, който е скъп и несвършен и с увеличаване на обема на продукцията става трудно приложим. Използването на статистически методи позволява да се правят анализи и прогнози за качеството.

Приемателният статистически контрол може да се прилага при входящия контрол, при производствения контрол и при изходящия контрол. За да е ефективно прилагането му е необходимо готовата продукция да отговаря на следните изисквания:

- да е резултат от масово или серийно производство;
- да е разделена на партии;
- да е складирана (или опакована) така, че да може да се вземе случайна извадка;
- да е резултат на добре настроен технологичен процес (т.е. да няма систематични, а само случайни отклонения на технологичните норми);
- да не изисква по други съображения 100%-ен контрол.

Извадката трябва да бъде непреднамерана (репрезентативна), т.е. всяко едно от намиращите се в партията изделия трябва да има еднакъв шанс да попадне в наблюдаваната извадка (БДС 8090 Методи за вземане на случайни извадки).

Признаците по които се проверяват изделията могат да бъдат отнесени към две основни категории - качествени и количествени.

Качествен признак е такъв, при който всяко от контролираните изделия може да бъде класифицирано в една от няколко категории. Ако в частност тези категории са две, признакът е алтернативен. В този случай всяко контролирано изделие се класифицира като "годно" или "негодно" (качествено или дефектно).

Количествен признак е такъв, при който за контролираното изделие се определя една величина, стойностите на която се изразяват в дадена мерна единица.

Приемателният статистически контрол защитава предимно интересите на потребителя, но трябва да се вземат предвид и интересите на производителя. Производителят е заинтересован всички партии, отговарящи на изискванията по качеството да бъдат приети, а потребителят - всички партии, не отговарящи на качествените изисквания, да бъдат отхвърлени (да не бъдат приети). Практически това е невъзможно и се налага предвиждането на съответни рискове както за производителя α , така и за потребителя β .

Поради това, че обемът на извадката е много по-малък от обема на партията, са възможни грешки при оценка на партията. Тези грешки могат да бъдат два вида:

- грешка от I род - отхвърляне на годна партия;
- грешка от II род - приемане на негодна партия.

Вероятността α за допускане на грешка от I род се нарича риск на производителя, а вероятността β за допускане на грешка от II род - риск на потребителя.

Равнището на качеството на партида или на технологичен процес се изразява чрез дефектността p - отношението на броя на дефектните изделия в партидата (или броя дефекти) и обема на партидата N . За да се представи p в процент дефектни изделия или брой дефекти на 100 изделия, трябва дефектността да се умножи по 100.

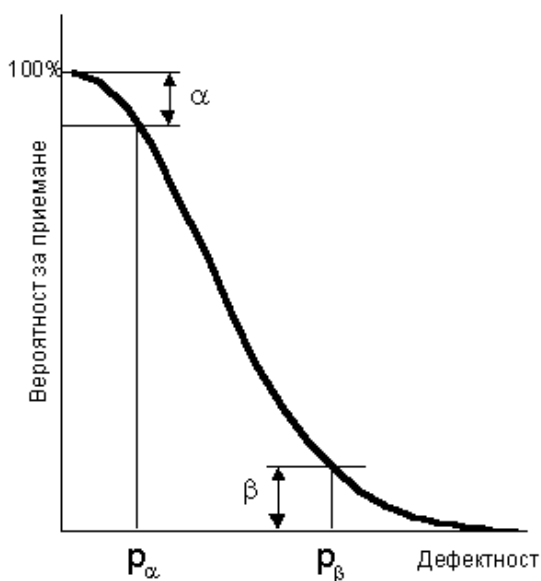
Важен момент от приемателния статистически контрол е правилното избиране на границата между годната и негодна продукция. Във връзка с това са въведени допустима дефектност p_α и недопустима дефектност p_β . Те не са равни помежду си ($p_\alpha < p_\beta$) и представляват две нива на качеството. Производителят и потребителят се договарят за допустимата и недопустима дефектност.

Допустимата дефектност p_α е относително малка. При дефектност $p < p_\alpha$ партидата се счита за качествена, отхвърлянето ѝ е нежелателно и настъпва с малка вероятност. Недопустимата дефектност p_β е по-голяма от p_α . Приемането на партида с дефектност $p > p_\beta$ е нежелателно и настъпва с малка вероятност.

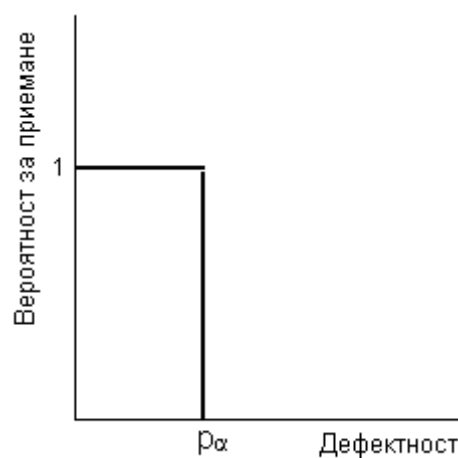
За допустима дефектност може да се приеме приемателното равнище на качеството AQL, определено като максимална стойност на средната дефектност, задоволяваща целите на приемане. Приемателно равнище на качеството AQL (Acceptable Quality Level) е равнището което се явява приемливо за целите на статистическия приемателен контрол (а не в абсолютен смисъл). В действителност равнището на качеството на партидите трябва да бъде по-малко от AQL. В последната редакция на ISO терминът AQL е променен на Acceptable Quality Limit – граница на приемателното качество – най-голямата допустима част на несъответстващите единици продукция. Отделни партии с равнище на качеството, съответстващо на границата AQL могат да бъдат приети с достатъчно висока вероятност. Границата на приемателното качество AQL не означава, че това е желаното равнище на качеството.

За недопустима дефектност може да се приеме LQ – гранично качество (Limiting Quality) – равнище на качеството на отделна партида, при което в статистическият приемателен контрол вероятността за приемане е малка.

Вместо p_α и p_β могат да се използват равнището на качеството на риска на производителя (PQR) и равнището на качеството на риска на потребителя (CQR), които се дават в процент дефектни изделия (БДС ISO 8422-91), т.е.: $PQR = p_\alpha \cdot 100\%$; $CQR = p_\beta \cdot 100\%$.



фиг. 32 Оперативна характеристика



фиг. 33 Идеална оперативна характеристика

Под *оперативна характеристика* (ОС - крива) на даден извадков план се разбира кривата, която представя вероятността за приемане L на партидата в зависимост от нейната действителна дефектност p (фиг.32).

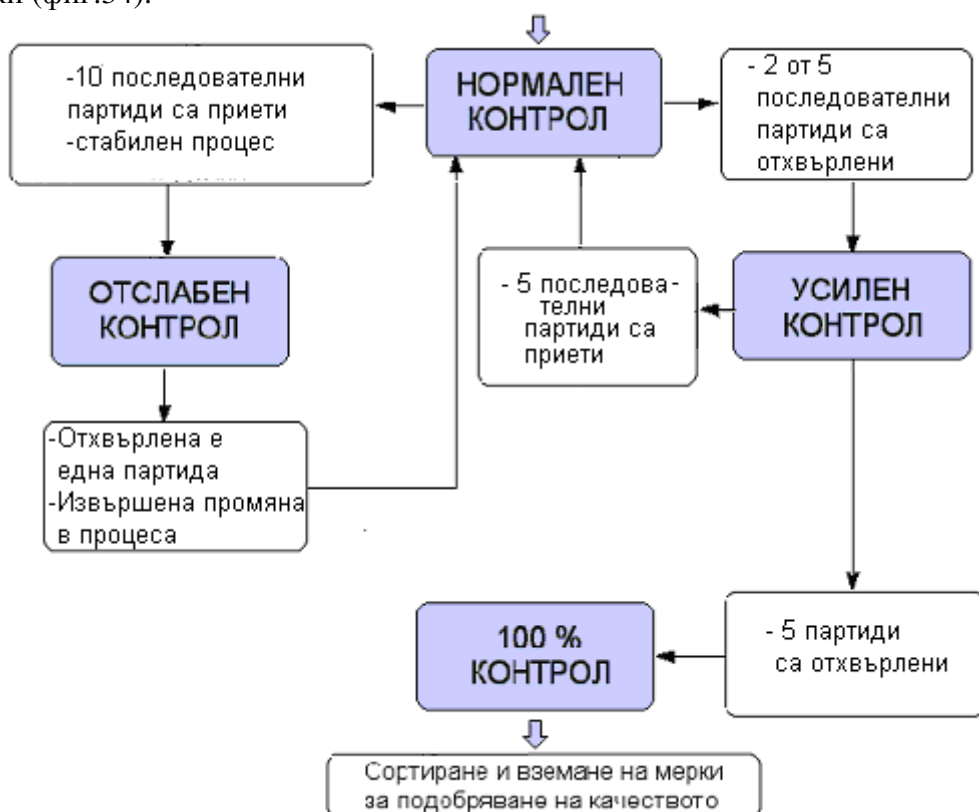
$$L = \Phi[\sqrt{n}(z_{1-p} - z_{1-p_0} + \frac{1}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha})] = NORMSDIST\{\sqrt{n}[NORMSINV(1-p) - k]\}$$

Оперативната характеристика е монотонно намаляваща функция. Идеалната оперативна характеристика би имала вида, показан на фиг. 33, но тя е недостижима поради наличието на грешки от I и II род, съпътстващи всеки извадков контрол.

Оперативната характеристика е по-благоприятна когато е по-стръмна. Стръмността се увеличава с увеличаване на обема на извадката n при постоянен обем на партидата N и с намаляване на приемателното число при еднакъв обем на извадката n . Построяването на оперативната характеристика позволява пълно изучаване и правилно прилагане на извадковия план за който се отнася. От лявата част на кривата се интересува предимно производителят, а от дясната - потребителят.

Равнището на контрола е свързано с относителния обем на проверката. Предвидени са 3 общи равнища на контрола I, II и III и 4 специални равнища S1, S2, S3 и S4. Обемът на извадката n е най-малък за равнище I и най-голям за равнище III. При специалните равнища обема на извадката е по-малък и те се използват в обосновани случаи (например разрушителен контрол). В общ случай се използва равнище II.

От вида на контрола зависи обема на извадката. Той може да бъде *нормален*, *усилен* и *отслабен*. Обикновено за първата партида се прилага нормален контрол. От нормален към засилен контрол се преминава, ако от 5 последователни партии са били отхвърлени 2. От засилен към нормален се преминава ако са били приети последователно 5 партии. От нормален към отслабен контрол се преминава при приети 10 последователни партии. От отслабен към нормален се преминава при една отхвърлена партида. Ако засилен контрол се прилага към 10 последователни партии се преминава към 100%-ен контрол или се вземат други мерки (фиг.34).



фиг.34 - Вид на контрола

Приемателен статистически контрол по количествен признак

Ако признакът, който се контролира може да се измери количествено, може да се приложи статистически контрол както по алтернативен, така и по количествен признак.

Основното изискване към партидата, подложена на контрол по алтернативен признак е спазване на условието нейната дефектност да бъде по-малка от допустимата. При необходимост от по-задълбочен анализ на качеството това не е достатъчно. Дефектността може да не е по-голяма от допустимата, но може да има разстройване на процеса, което не е възможно да се открие при контрол по алтернативен признак.

Приемателният статистически контрол по количествен признак дава по-пълна информация за изменението на контролирания параметър и по-рано сигнализира за влошено качество. Той е по-малко подходящ при голям брой на контролираните параметри. В такъв случай се препоръчва алтернативна проверка за повечето параметри, а количествена само за един по-важен. Ако е необходимо прилагането му за повече параметри, това се прави поотделно за всеки от тях. За прилагането на приемателния статистически контрол по количествен признак е необходимо наблюдаваният параметър да има нормално, или близко до нормалното разпределение, да е резултат от стабилен технологичен процес, партидите да са доставени от един производител, ползващ един и същи производствен процес. Ако производителите са различни, контролът се прилага за всеки от тях поотделно.

Приемателният статистически контрол по количествен признак се осъществява въз основа на условието, че изделието е дефектно, когато стойността на контролирания параметър е извън допустимите граници T_d (долна LSL) и T_r (горна USL).

Ако контролираният параметър има нормално разпределение с математическо очакване M и средноквадратично отклонение σ , дефектността може да се определи от площта на закона за разпределение излизаща извън границите на допусковото поле.

При зададени допустима дефектност p_0 и риск на производителя α , границите на зоната на приемане с риск по-малък от α са съответно:

$$UAL = USL - z_{1-p_0} \sigma$$

$$LAL = LSL + z_{1-p_0} \sigma$$

При зададена недопустима дефектност p_1 и риск на потребителя β , границите на зоната на отхвърляне с риск по-малък от β са съответно:

$$URL = USL - z_{1-p_1} \sigma$$

$$LRL = LSL + z_{1-p_1} \sigma$$

Зоната между тези граници е зона на неопределеност (несигурност), т.е. възможно е приемане или отхвърляне с рискове по-големи от α и β . С увеличаване на обема на извадките зоната на неопределеност намалява. При достатъчно голям обем на извадките като граници за приемане може да се използват UCL и LCL.

$$UCL = USL - k\sigma$$

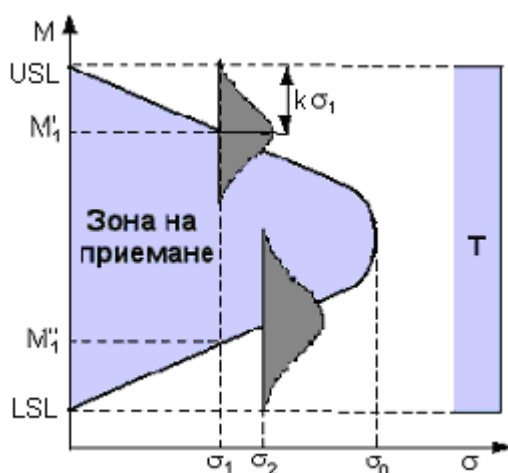
$$LCL = LSL + k\sigma$$

$$\text{където } k = z_{1-p_0} - \frac{z_{1-\alpha}}{\sqrt{n}} = NORMSINV(1-p_0) - \frac{NORMSINV(1-\alpha)}{SQRT(n)}$$

Вероятната дефектност p зависи от положението на центъра на групиране на извадката спрямо допустимите граници и при $C_p > 1$ е удобно да бъде определяна чрез индекса C_{pk} :

$$p = 1 - \text{NORMSDIST}(3C_{pk});$$

Критерият за приемане може да се представи графично (фиг.36). Дефектността зависи от параметрите M и σ . При постоянно σ дефектността зависи от положението на центъра на групиране M . Например, ако $\sigma = \sigma_1$ (фиг.40) и центърът на групиране е в интервала (M'_1, M''_1) може да се счита с определена доверителна вероятност, че всички стойности на контролирания параметър са в границите на допусковото поле. При увеличаване на σ , интервалът в който трябва да се намира центъра на групиране се стеснява. При $\sigma > \sigma_0$, има стойности на контролирания параметър, които са извън допустимите граници USL и LSL, независимо от положението на центъра на групиране. Партиди за които точките с координати (M, σ) попадат в зоната на приемане могат да се считат за качествени и се приемат. За различни допуски и различни стойности на приемателното равнище на дефектност AQL кривите на приемане са различни. Но ако вместо осите M и σ се използват $(M - LSL)/(USL - LSL)$ и $\sigma/(USL - LSL)$, кривите на приемане за различни допуски могат да се нанесат на обща графика. Така са построени номограми, които да се използват при графичен способ на приемателен статистически контрол по количествен признак.



фиг.36 - Графично представяне на критерия за приемане

За оценка на положението на центъра на групиране M се използва извадковата характеристика средноаритметична стойност $\bar{X}$. В зависимост от използваната извадкова характеристика за оценка на разсейването се различават: σ -метод и s -метод.

При σ -метода, ако процесът е бил дълго време под статистическо наблюдение, средноквадратичното отклонение σ на партидата може да се приеме за известно.

При s -метода средноквадратичното отклонение на партидата σ се оценява чрез средноквадратичното отклонение s на извадката.

Извадковите планове за приемателен статистически контрол по количествен признак са регламентирани в ISO 3951, ISO 8423.

Последователността на действията при провеждане на приемателен статистически контрол по количествен признак е следната :

- проверява се признака за нормално разпределение;
- задава (договорира) се приемателно равнище на дефектност AQL;
- избира се равнище (ниво) на контрола (I, II, III, s_1, s_2, s_3, s_4);

- от таблица в зависимост от обема на партидата и избраното равнище на контрол се определя ключова буква (табл. на приложението);
- избира се метод (σ или s -метод)
- чрез ключова буква от таблици за съответния метод (σ, s) се определя обема на извадката и приемателна константа k (контролен норматив);
- прави се извадка и се проверява;
- пресмятат се $\bar{X}$ и s (или σ);
- пресмятат се качествените индекси Q_r и Q_d :

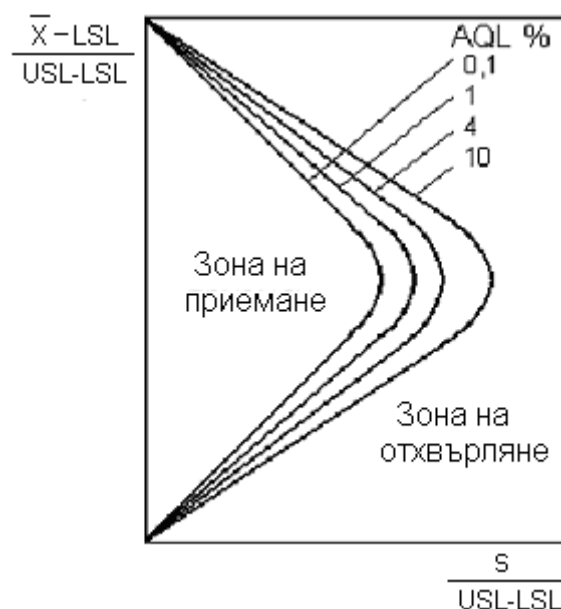
$$Q_r = \frac{USL - \bar{X}}{\sigma}, \quad Q_d = \frac{\bar{X} - LSL}{\sigma} \quad - \text{при } \sigma\text{-метод.}$$

$$Q_r = \frac{USL - \bar{X}}{s}, \quad Q_d = \frac{\bar{X} - LSL}{s} \quad - \text{при } s\text{-метод.}$$

- партидата се приема ако е изпълнено условието $Q_r \geq k$ и $Q_d \geq k$. Ако това условие не е изпълнено или поне един от двата качествен индекса Q_r и Q_d е отрицателен, партидата се отхвърля (не се приема). Партидата се отхвърля и ако σ е по-голямо от една максимална стойност $\sigma_{\max}$ – стойност при която дефектността е равна на AQL.

Освен чрез сравняване на качествените индекси с контролния норматив k , условие за приемане може да бъде разполагането на средноаритметичната стойност на извадката между границите на приемане LCL и UCL, т.е. $LCL < \bar{X} < UCL$.

Удобно е използването и на *графичен метод*. Върху разработени номограми (ISO 3951-1) за различни кодови букви, σ и s -методи и различни стойности на AQL се нанася точка с координати $\left(\frac{\bar{X} - LSL}{USL - LSL}, \frac{s}{USL - LSL} \right)$ - за s -метод. При σ -метода s се замества с σ . При попадане на тази точка в зоната на приемане партидата се приема. При попадане на точката в зоната на отхвърляне партидата не се приема (фиг.37).



фиг.37 - Графичен метод за приемателен контрол по количествен признак

Предвидени са 3 вида контрол: нормален, отслабен и засилен. Започва се с нормален контрол. При повишаване на дефектността се преминава към усилен контрол, а при намаляването ѝ - към отслабен контрол. Условиата за преминаване от един към друг вид контрол са дадени на фиг.34.

Последователните извадкови планове за количествен признак (ISO 3951-5) позволяват при определени условия намаляване на броя на контролираните изделия и намаляване на разходите за контрол, като осигуряват най-малък среден обем на извадките. Този вид контрол е подходящ в случаите когато контролът на характеристиката на качеството е сложен и скъпоструващ.

При последователните извадкови планове за количествен признак се определят величините g , h_A , h_R , чрез които се изчисляват приемателните A_L , A_U и отхвърлящите R_L , R_U стойности:

$$A_L = g \cdot \sigma \cdot n_\Sigma + h_A \sigma$$

$$A_U = (USL - LSL - g\sigma) n_\Sigma - h_A \sigma$$

$$R_L = g\sigma n_\Sigma - h_R \sigma$$

$$R_U = (USL - LSL - g\sigma) n_\Sigma + h_R \sigma$$

Прави се проверка за изпълнение на условието $\sigma < \sigma_{\max} = (USL - LSL)f_\sigma$ където f_σ зависи от зададеното AQL.

Ако $\sigma > \sigma_{\max}$ партидата се отхвърля. В противен случай изделията се подлагат на контрол едно по едно и се определя стойността x_i на контролирания параметър.

Изчислява се величината $y_i = x_i - LSL$ и натрупаната стойност Y_Σ - кумулативен запас на качество.

Ако $n_\Sigma < n_1$ и $A_L \leq Y_\Sigma \leq A_U$ партидата се приема

Ако $n_\Sigma < n_1$ и $Y_\Sigma \leq R_L$ или $Y_\Sigma \geq R_U$ партидата се отхвърля

Ако $n_\Sigma < n_1$ и нито едно от горните условия не е изпълнено проверката продължава

Ако $n_\Sigma > n_1$ партидата се приема ако $(USL - LSL - g\sigma) n_1 \leq Y_\Sigma \leq g\sigma n_1$

$n_1 = 1,5n_0$, където n_0 е обемът на извадката за едностепенен план по ISO 3951-1

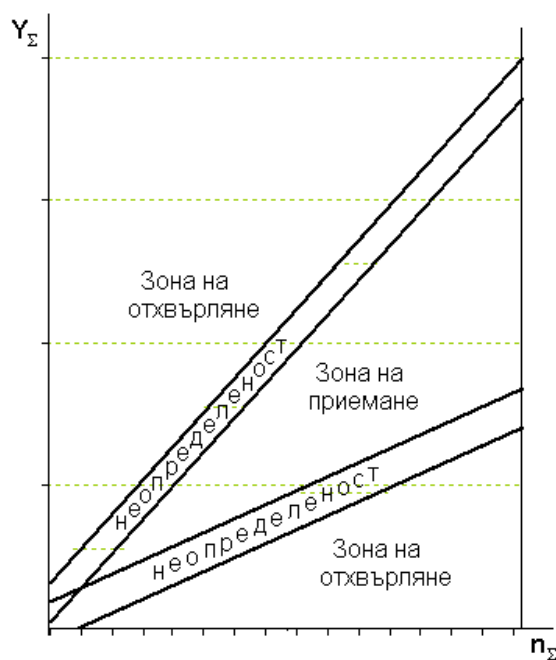
Може да бъде използван и графичен метод, при който се построяват четири прави с уравнения (фиг.38):

$$A_L = g \cdot \sigma \cdot n_\Sigma + h_A \sigma$$

$$A_U = (USL - LSL - g\sigma) n_\Sigma - h_A \sigma$$

$$R_L = g\sigma n_\Sigma - h_R \sigma$$

$$R_U = (USL - LSL - g\sigma) n_\Sigma + h_R \sigma$$



фиг.38 Графичен метод на последователен извадков план

На тази графика се нанася точка с координати ($n\bar{x}$; Y_{Σ}). Ако точката е в зоната на приемане, партидата се приема. Ако точката е в зоната на отхвърляне, партидата се отхвърля. Ако точката е в зоната на неопределеност се взема следващо изделие за проверка.

За една и съща кодова буква обемът на извадките е значително по-малък при контрол по количествен признак, сравнен с този по алтернативен признак. Преимущество на приемателния статистически контрол по количествен признак е възможността да се следят тенденциите на изменение на качеството на продукцията чрез сравняване на стойностите на характеристиките на разпределението $\bar{X}$ и s .

Приемателен статистически контрол по алтернативен признак

Приемателният статистически контрол по алтернативен признак се регламентира от ISO2859, ISO8422.

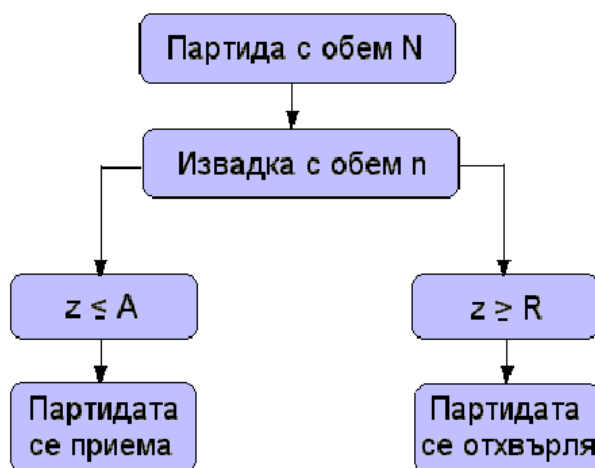
Статистическият извадков план за контрол представлява правило, с което въз основа на статистическо изследване се прави извод за качеството и се взема решение за приемане или отхвърляне на партидата. Планът трябва да предпазва производителя от отхвърляне на качествена партида и да предпазва потребителя от приемане на некачествена партида т.е. рисковете α и β да бъдат малки. Например може да се приеме $\alpha=0,05$ и $\beta=0,10$.

Извадковите планове за контрол биват: едностепенен, двустепенен, многостепенен и последователен. Те се основават на две регламентирани числа - *приемателно число* A и *отхвърлящо число* R , които се сравняват с броя дефектни изделия z , открити в извадките.

Едностепенен извадков план

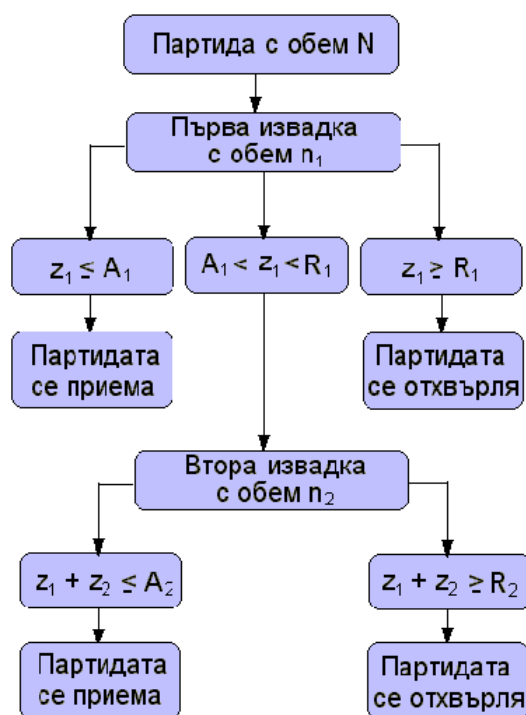
От партида с обем N се прави само една извадка с обем n . Изделията в извадката се проверяват и се установява броя на дефектните изделия z . Ако $z \leq A$, партидата се приема. Ако $z \geq R$, ($R = A+1$) партидата се отхвърля (не се приема), фиг. 39.

Едностепенният извадков план е рационален при продължителни проверки. При него средният обем на извадките е най-голям.



фиг. 39 Едностепенен извадков план

Двустепенен извадков план



фиг. 39а Двустепенен извадков план

От партида с обем N се прави първа извадка с обем n_1 и се проверява. Откриват се z_1 дефектни изделия. Ако $z_1 \leq A_1$ партидата се приема. Ако $z_1 \geq R_1$ партидата се отхвърля. Ако $A_1 < z_1 < R_1$ се прави втора извадка с обем n_2 , в която след проверка се откриват z_2 дефектни изделия. Ако $z_1 + z_2 \leq A_2$ партидата се приема. Ако $z_1 + z_2 \geq R_2$ ($R_2 = A_2 + 1$) партидата се отхвърля (фиг.39а).

Прилага се когато поради големия обем на извадката едностепенният план, и поради голямата продължителност на контрола многостепенният план са неподходящи. Обемът на извадките е по-малък отколкото при едностепенния план.

Многостепенен извадков план

Този план е подобен на двустепенния но ($R_2 \neq A_2 + 1$) и ако след втората извадка не се стигне до вземане на решение се продължава с проверката на нови извадки до вземане на решение (приемане или отхвърляне на партидата).

Последователен извадков план

При този план обемът на проверката не са фиксира предварително. От партидата се вземат изделия едно по едно или на малки групи и се поверяват. Въз основа на проверката се взема едно от следните решения: да се приеме партидата; да се отхвърли партидата; да се продължи проверката. Методът продължава до приемане или отхвърляне на партидата.

Общо взето броят на проверените изделия при този план е по-малък в сравнение с останалите, по икономичен е и е особено целесъобразен при проверка чрез разрушаване.

Приемателното число A за всяка стойност на натрупания извадков обем n_Σ се намира чрез закръгляване надолу до най-близкото цяло число на величината $g \cdot n_\Sigma - h_A$. Отхвърлящото число R се намира чрез закръгляване нагоре до най-близкото цяло число на величината $g \cdot n_\Sigma + h_R$, където множителят g и константите h_A и h_R са функция на p_α , p_β , α и β и се определят от таблици (ISO8422/91) или от зависимостите:

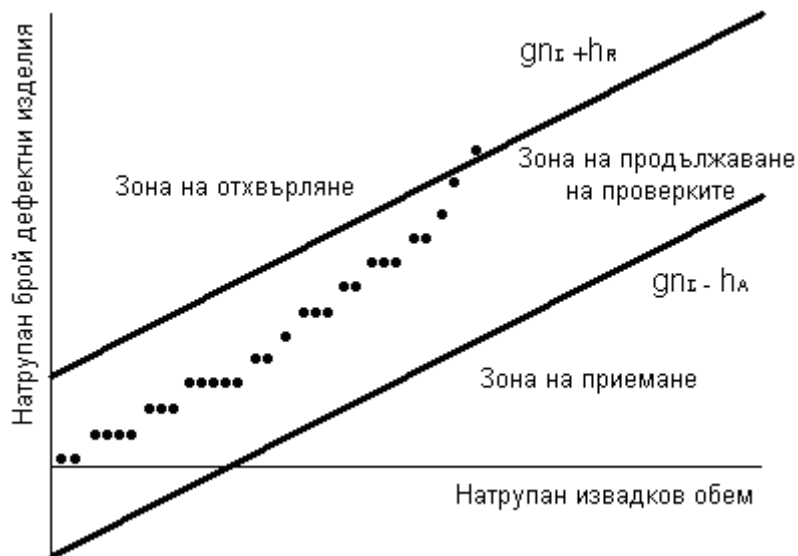
$$g = \frac{\lg \frac{1-p_\alpha}{1-p_\beta}}{\lg \frac{p_\beta(1-p_\alpha)}{p_\alpha(1-p_\beta)}}$$

$$h_A = \frac{\lg \frac{1-\alpha}{\beta}}{\lg \frac{p_\beta(1-p_\alpha)}{p_\alpha(1-p_\beta)}}$$

$$h_R = \frac{\lg \frac{1-\beta}{\alpha}}{\lg \frac{p_\beta(1-p_\alpha)}{p_\alpha(1-p_\beta)}}$$

Когато стойността $gn_\Sigma - h_A$ е отрицателна или $gn_\Sigma + h_R > n_\Sigma$, натрупаният извадков обем n_Σ е все още твърде малък за вземане на решение за приемане или отхвърляне на партидата. Най-малкият натрупан извадков обем, необходим за приемане на партидата е $n_{\Sigma \min} > h_A/g$, а за отхвърлянето ѝ е $n_{\Sigma \min} > h_R/(1-g)$.

Ако натрупаният брой дефектни изделия е по-малък от приемащото число ($z_\Sigma \leq A$) партидата се приема. Ако $z_\Sigma \geq R$ партидата се отхвърля. Ако $R > z_\Sigma > A$ проверката продължава.



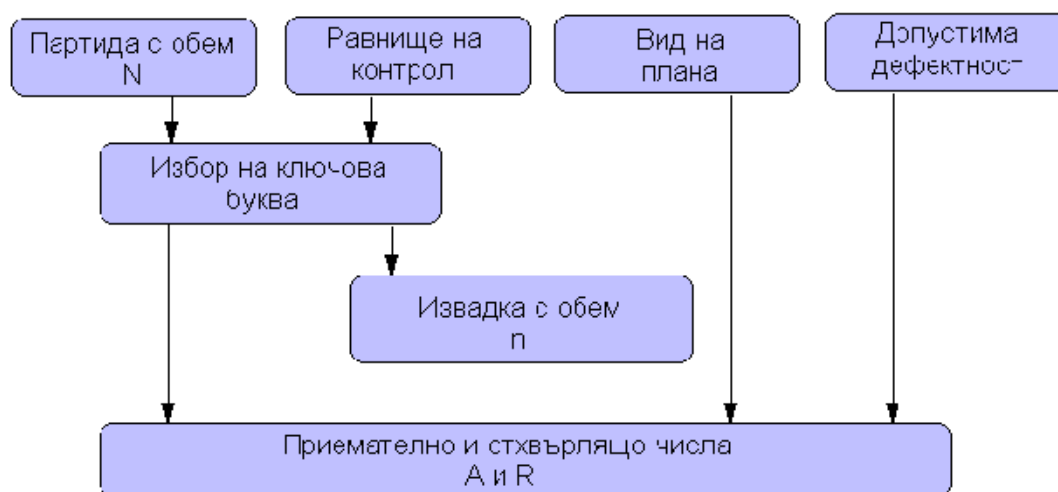
фиг. 40 Графичен метод на последователен извадков план

По-удобен и нагледен е графичният метод на представяне на последователния извадков план (фиг. 40). По хоризонталната ос се нанася натрупания извадков обем, а по вертикалната - натрупания брой дефектни изделия. Прекарват се две успоредни прави с уравнения съответно $gn_\Sigma - h_A$ и $gn_\Sigma + h_R$, които определят областите за приемане на партидата, за отхвърляне на партидата и за продължаване на проверката. Контролът се прекратява и се взема решение когато точка (n_Σ, z_Σ) попадне в областта за приемане или в областта за отхвърляне.

Средният очакван обем на проверката n_Σ зависи от дефектността. При партиди с голяма дефектност, вероятността за приемане е малка и обемът на проверката се доближава до обема на партидата.

За да може да бъде разработен конкретен план трябва предварително да са зададени следните характеристики (фиг. 41):

- равнище на контрола;
- вид на плана (едностепенен, двустепенен, ...);
- вид на контрола;
- обем на партидата N;
- допустима дефектност.



фиг. 41 Ред за определяне на приемателно и отхвърлящо числа

Обемът на извадката n се определя чрез ключова буква по таблица в зависимост от обема на партидата N и избраното равнище на контрол. Ограничения за обема на партидата няма. Допустимата дефектност се договаря. От таблица в зависимост от ключовата буква и допустимата дефектност се определят приемателното и отхвърлящото числа (фиг.42).

↓

Обем на партидата	специални разлици на прозврка				общи равнища на прозврка		
	s1	s2	s3	s4	1	II	III
91 - 150	D	E	F	G	D	F	G
151 - 280	E	F	G	H	E	G	H
281 - 500	F	G	H	I	F	H	I
501 - 1200	G	H	I	J	G	I	J

▽

Едностепенен план - нормален контрол

Ключова буква	Обем на извадката	приемателно равнище на дефектност AQL							
		0,04		0,065		1		1,5	
		A	R	A	R	A	R	A	R
G	32	0	1	0	1	1	2	1	2
H	50	0	1	1	2	1	2	2	3
J	80	1	2	1	2	2	3	3	4

фиг.42 - Определяне на приемателното и отхвърлящо числа

Несъответствията се делят на критични и некритични. Некритичните несъответствия могат да се разделят на групи в зависимост от значимостта. За различните групи се използват различни AQL. В много случаи е достатъчно некритичните несъответствия да се разделят на две групи – основни несъответствия (група А) и несъответствия от група В, имащи по-малка значимост. Партидата се приема само ако са изпълнени критериите за приемане за всички групи.

При контрол по алтернативен признак, ако продуктът има повече от едно несъответствие от различни групи (например едно несъответствие от група А и едно от група

В) той се разглежда като несъответстващ от високата група (А). Ако се провежда контрол по брой несъответствия, а не по брой несъответстващи изделия, несъответствията са сумират по групи.

Критичните несъответствия са свързани с безопасността. В случай на безразрушителен контрол обикновено се изисква обема на извадката да е равен на обема на партидата, а приемателното число да е равно на нула. Това е пълен (100%) контрол, но не е традиционния 100% контрол със сортиране (разделяне на годната от негодна продукция). Ако критично несъответствие е открито, то цялата партида не се приема.

Ако единствената възможност за контрол на критичните несъответствия е провеждането на разрушителен контрол не е възможно да са подложи на контрол цялата партида и се провежда извадков контрол. Обемът на извадката n в такъв случай може да се определи по формулата (ISO TR 8550):

$$n = \left(N - \frac{d}{2} \right) (1 - \beta^{1/(d+1)}),$$

където N - обем на партидата;

β - зададена вероятност за грешка при откриване на едно критично несъответствие;

d – максимален брой критични несъответстващи единици продукция, допустими в партидата.

Ако p е най-голямата допустима част несъответстващи единици продукция в партидата, то $d=Np$ със закръгляване надолу до най-близкото цяло число.

Пример: Партида с $N=3454$ единици продукция, $\beta=0,001$, най-голям допустим процент критични несъответстващи единици продукция 0,2%.

$p=0,2/100=0,002$

$d=Np=3454 \cdot 0,002=6,908$; Приема се $d=6$

$$n = \left(N - \frac{d}{2} \right) (1 - \beta^{1/(d+1)}) = 2164$$

Приемателно число $A=0$; Отхвърлящо число $R=1$.

Твърде високия обем на извадката се дължи на изискването за висока достоверност при ниска част на критичните несъответстващи единици продукция.

Ако началните изчисления водят до неприемлив обем на извадката, то рискът (вероятността) и/или допустимият брой несъответстващи единици могат да бъдат преразгледани и да бъдат установени други критерии.

Когато критичната характеристика е измерима може да се използва извадков план за количествен признак, като се промени (завиши) изискването към характеристиката. Например ако минималното допустимо натоварване за разрушаване на компонента е 2000N, може да се използва вместо границата 2000N за критично несъответствие, границата 4000N за основно несъответствие, като се използва извадков контрол по количествен признак, с получаване на информация както за средната стойност така и за разсейването на характеристиката. Такъв подход може да даде по-добри резултати от пълен контрол.

Процедурите за извадков контрол по алтернативен признак са регламентирани в ISO 2859:

ISO 2859-1 Процедури за извадков контрол по алтернативен признак. Планове за извадков контрол на последователни партии на основата на границата на приемливо качество AQL - Предназначен предимно за приемане на обекти при непрекъснато производство на серия партии. Тази серия трябва да включва не по-малко от 10 партии за прилагане на правилата за превключване от нормален към усилен или отслабен контрол. Правилата за превключване са предназначени за:

- защита на потребителя с преминаване към усилен контрол или прекратяване на извадковия контрол при влошено качество
- намаляване на разходите за контрол с преминаване към отслабен контрол, ако е постигнато добро качество в последователни партии

ISO 2859-1 може да бъде използван и за контрол на изолирани партии, но в този случай се препоръчва да се анализират кривите на оперативните характеристики при избор на плана.

ISO 2859-2 Процедури за извадков контрол по алтернативен признак. Планове за извадков контрол на отделни партии на основата на границата на гранично качество LQ. Основната разлика спрямо ISO 2859-1 е, че тук AQL не се използва като входна величина. ISO 2859-2 регламентира следните две процедури:

- Процедура А – използва се когато производителят и потребителят е необходимо да оценят отделна партида;
- Процедура В - използва се когато производителят приема, че партидата е една от непрекъснатата серия партии, а потребителят я разглежда като отделна партида.

ISO 2859-3 Процедури за извадков контрол по алтернативен признак. Процедури за извадков контрол с пропускане на партии - Процедурата е предназначена само за контрол на непрекъснати серии партии и не трябва да се използва за контрол на отделни партии. Предполага се, че всички партии имат еднакво качество, т.е. неконтролираните партии имат същото качество както и контролираните. Процедурата не се прилага при контрол на характеристики, които касаят безопасността. Плановете предвиждат контрол на една от две, три, четири и пет партии.

ISO 2859-4 Процедури за извадков контрол по алтернативен признак. Оценка на съответствието със заявено равнище на качеството - регламентира процедурите и плановете за извадков контрол за оценка на съответствието на равнището на качеството със заявеното. Процедурите в ISO 2859-4 основно се прилагат за систематични проверки, като анализ на дейности и одити. ISO 2859-1, ISO 2859-2, ISO 2859-3 са предназначени за приемателен контрол при наличие на двустранни споразумения между производителя и потребителя.

Неопределеността на измерването при приемателния статистически контрол по количествен признак

Приемателният статистически контрол е основан на проверката на статистически хипотези – предположението, че дадено статистическа характеристика (например математическото очакване) на контролирания параметър е равна на определена стойност или попада в предварително зададен интервал [LSL, USL]. Това се прави с построяване на доверителния интервал за математическото очакване при доверителна вероятност $\gamma=1-\alpha$ и проверка на хипотезата H_0 : математическото очакване M е равно на зададена стойност. За всички стойности M_i , които лежат в този доверителен интервал хипотезата H_0 ще бъде приета с ниво на значимост α .

Границите на предварително зададения интервал от допустими стойности LSL и USL могат да се разглеждат като квантили на разпределението, определящи вероятностите p_r и p_d стойностите на контролирания параметър да излязат извън интервала [LSL, USL]. Ако тези вероятности са по-малки от предварително зададени стойности p партидата се приема за съответстваща на изискванията, в противен случай тя се отхвърля като несъответстваща.

Ако контролираният параметър на качеството, който може да се разглежда като случайна величина, има математическо очакване M и дисперсия σ^2 при проверката на хипотезата се преминава в нормиран мащаб на аргумента и стойностите на случайната величина се заменят с границите на интервала с допустими стойности:

$$Q_e = \frac{USL - M}{\sigma}; \quad Q_o = \frac{M - LSL}{\sigma}$$

при което Q също има нормално разпределение с математическо очакване равно на нула. Това позволява използването на функцията на Лаплас за определяне на функцията на разпределение и минимално възможните стойности $k_r=k_d=k$ на Q_r и Q_d , при които да се осигурят желаните вероятности за попадане на стойността на контролирания параметър извън допустимите граници. Стойностите на k се определят от таблиците на стандартното нормално

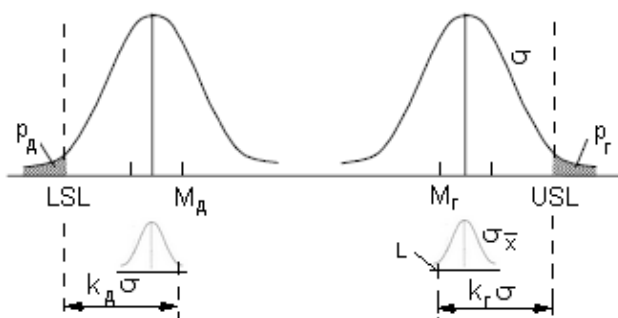
разпределение, така че да се осигурят желаните вероятности за излизане извън допустимите граници.

$$P(Q_d \leq k_d) = 1-p; \quad P(Q_r \leq k_r) = 1-p$$

$$k = z_{1-p_0} - z_{1-\alpha} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Партидата се приема ако едновременно са изпълнени условията $Q_r \geq k_r$ и $Q_d \geq k_d$ или $\bar{x} \leq USL - k\sigma$ и $\bar{x} \geq LSL + k\sigma$.

Дефектността зависи от положението на центъра на групиране и от разсейването на параметъра на качеството, т.е. от параметрите M и σ и може да се определи от площта на закона на разпределение, излизащ извън интервала от допустими стойности $[LSL, USL]$ – фиг.43.



фиг.43

При постоянно σ дефектността зависи от положението на центъра на групиране M . Ако центърът на групиране е в границите на интервала $[M_d, M_r]$ може да се счита с определена доверителна вероятност γ , че всички стойности на контролирания параметър са в границите на интервала от стойности $[LSL, USL]$. При увеличаване на σ , интервалът в който трябва да се намира центъра на групиране се стеснява. При $\sigma = \sigma_0 = (USL - LSL)/2k$ този интервал става равен на нула (фиг.45).

Вероятността за получаване на грешка от I род при проверка на хипотезата H_0 (отхвърляне на нулева хипотеза, която е вярна, т.е. неприемане на партида, отговаряща на изискванията – риск на производителя) може да се определи от оперативната характеристика (зависимостта на вероятността за приемане L от дефектността p):

$$L\{p, n, k\} = \Phi\{n^{1/2}(z_{1-p} - k)\},$$

изчислена с използване на таблиците на нормалното стандартно разпределение $\Phi(z)$ или функцията NORMSDIST(z).

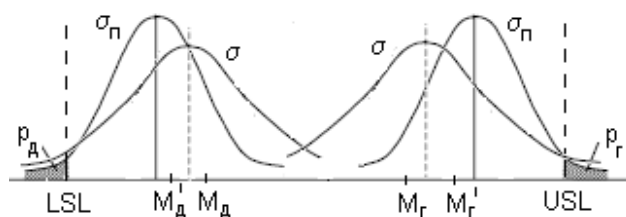
Влияние на неопределеността на измерване върху вероятността за приемане.

За оценка на положението на центъра на групиране на параметъра на качеството на партиди, подложени на приемателен статистически контрол по количествен признак, най-често се използват средноаритметичната стойност $\bar{x}$, а за оценка на разсейването – средноквадратичното отклонение или размаха, получени чрез измерване на параметъра на качеството на извадка. Това измерване е съпроводено с неточност, която може да се оцени чрез стандартната неопределеност u – средноквадратичното отклонение на измерване, характеризиращо разсейването на стойностите, които могат да бъдат приписани на измерваната величина.

Законът на разпределение, получен при сумирането на двете нормално разпределени случайни величини – параметъра на качеството и резултата от измерването е също нормален закон със средноквадратично отклонение σ .

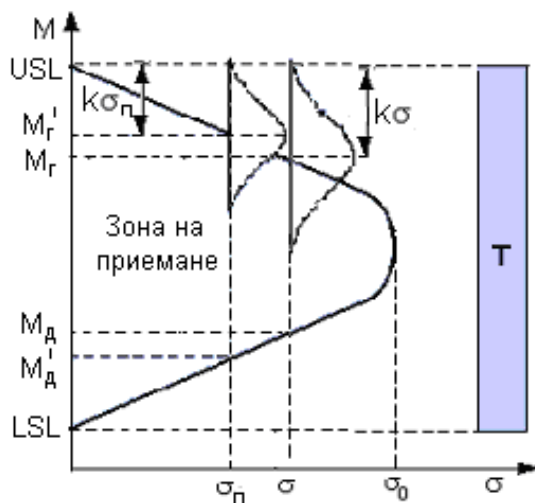
$$\sigma = \sqrt{\sigma_n^2 + u^2},$$

където σ_n характеризира разсейването на параметъра на качеството на партидата, подложена на контрол.



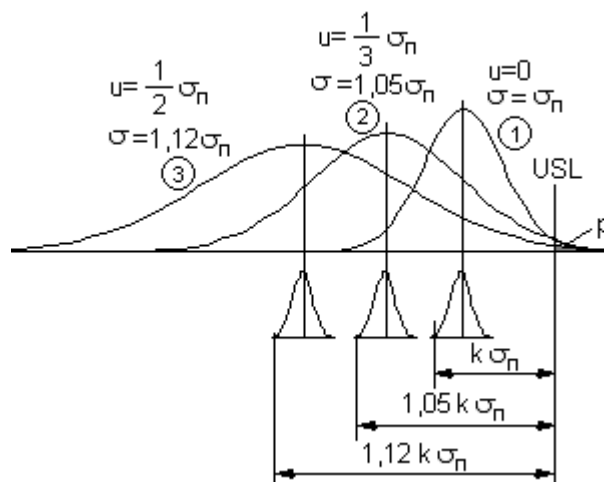
фиг.44

Неопределеността на измерване влияе върху параметъра σ , а от там и върху интервала от стойности, които може да приема центъра на групиране на контролирания параметър на качеството за да бъде приета партидата за съответстваща на изискванията. С увеличаване на неопределеността на измерване този интервал се стеснява (фиг.45). Това води до увеличаване на вероятността за грешки от I род, т.е. неприемане на партида, отговаряща на изискванията. Рискът на производителя се увеличава с увеличаване на неопределеността на измерване. Партидите с център на групиране в интервалите $[M_d', M_d]$ и $[M_r, M_r']$ ще бъдат отхвърлени поради това, че $\sigma > \sigma_n$ вследствие на влиянието на неопределеността на измерване на проверявания параметър на качеството (фиг.44,фиг.45).



фиг.45

На фиг.46 са показани три случая с измерване, извършено с различна неопределеност: $u=0$; $u=0,33\sigma_n$ и $u=0,5\sigma_n$, а на фиг. 47 са построени оперативните характеристики при тези три случая, за конкретен извадков план.



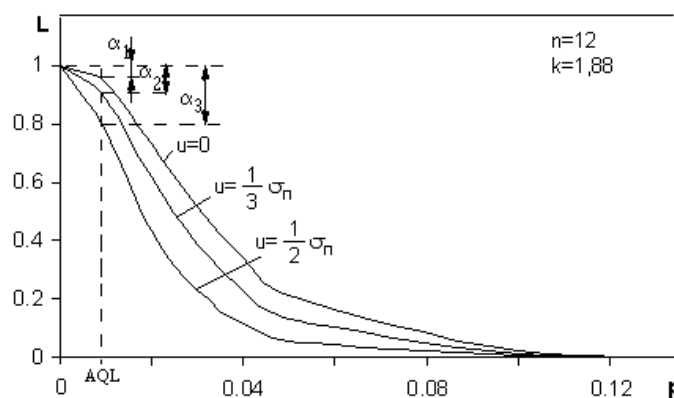
фиг.46

$$L_{u=0} = \text{NORMSDIST}\{n^{1/2}(z_{1-p}-k)\}$$

$$L_{u=0,33\sigma_n} = \text{NORMSDIST}\{n^{1/2}(z_{1-p}-1,05k)\}$$

$$L_{u=0,5\sigma_n} = \text{NORMSDIST}\{n^{1/2}(z_{1-p}-1,12k)\}$$

където $z_{1-p} = \text{NORMSINV}(1-p)$.



фиг.47

С увеличаване на неопределеността на измерването, риска α за отхвърляне на партида, отговаряща на изискванията (риска на производителя) се увеличава. Количествено увеличаването на риска на производителя, дължащо се на неопределеност на измерването, може да се определи от разликата на вероятностите за приемане $L_{u=0}$ и L_u при дефектност $p=AQL$. Така например при $u=0,33\sigma_n$ тази разлика ще бъде:

$$\Phi\{n^{1/2}(z_{1-AQL}-k)\} - \Phi\{n^{1/2}(z_{1-AQL}-1,05k)\},$$

която за извадков план с параметри $n=12$; $k=1,88$; $AQL=0,02$ ще бъде 0,115.

Когато процесът на формиране на параметрите на качеството е устойчив по отношение на разсейването и са налице условия да се приложи σ -метод на приемателен статистически контрол по количествен признак, при предварителното изследване на процеса с цел определяне на σ , извършването на измервания с по-малка неопределеност е обосновано, тъй като разходите за по-точни измервания ще бъдат компенсирани с намаления риск за отхвърляне на отговарящи на изискванията партиди. Но и при извършване на измерванията на параметъра на качеството на извадките, следва да се държи сметка за неопределеността на измерване, тъй като тя влияе и върху оценката на положението на центъра на групиране. При прилагане на s или R методи, при които параметъра, характеризиращ разсейването се определя чрез измерване на параметъра

на качеството на извадки от всяка проверявана партида, също трябва да се отчита неопределеността с която са получени резултатите от измерване.

В резултат на неопределеността на резултата от измерване се поема риск както от производителя, така и от клиента, за неправилно определяне на съответствието или несъответствието със специфицираните изисквания. Това налага, преди въвеждането на приемателен статистически контрол, постигане на предварително съгласие между заинтересованите страни относно неопределеността на измерване, което може да се постигне чрез преценка и анализ на конкретните оперативни характеристики и на неблагоприятните за всяка от страните последствия от неправилно окачествяване вследствие на неопределеност на измерването и определяне на приемлива и за двете страни стойност на неопределеността.

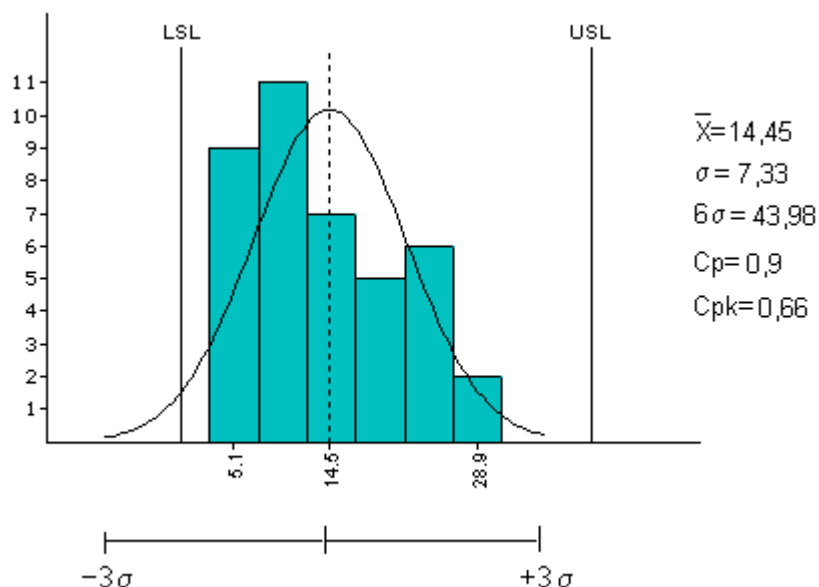
5.6. Обработка на данни с негаусово разпределение при контрол на качеството

Стандартизираните статистически методи за обработване на данни за целите на управление на качеството (ISO TR 10017) предполагат данните да имат нормално разпределение. Но в редица случаи това не е изпълнено. Причините за получаване на разпределения отклоняващи се от нормалното разпределение могат да бъдат различни – например:

- наличието на данни с екстремни стойности в малки извадки;
- наслагване на два или повече процеса което води до получаване на дву- или многомодални разпределения;
- осъществяване на измерванията при събирането на данните със средства, които нямат достатъчна разрешаваща способност и в масива данни броя различни стойности е недостатъчен;
- събирането на данни след предварително сортиране;
- данните по природа се разпределят по друг закон.

Някои от статистическите методи са относително устойчиви към нарушението на предпоставката за нормалност при условие, че обемите на извадките са големи (например провеждането на t-тест), но други - например статистически контрол на процесите (SPC), анализ на измервателните системи (MSA), анализ на възможностите на процеса (PCA), F-тест и др.- са чувствителни към нарушението на предпоставката за нормалност дори и при големи извадки. При управлението на качеството обикновено се обработват данни от извадки с малък обем, което допълнително прави използваните статистически инструменти силно чувствителни към нарушението на предпоставката за нормалност и може да доведе до значителни грешки в оценките.

Преобразуване на данните: Използването на стандартизираните статистически методи изисква потвърждение за нормално разпределение чрез осъществяване на предварителна проверка за вида на закона на разпределение. Ако това условие не е изпълнено е възможно допускането на значителни грешки в оценката. На фиг.48 е даден пример за оценка на възможностите на процес (PCA-анализ) чрез използване на стандартизираната методика върху данни, за които хипотезата за нормално разпределение не е потвърдена, т.е налице е отклонение от нормалното разпределение. Оценената зона на разсейване ($6\sigma=43,98$) е значително по-голяма от размаха ($R=23,8$) и индексът C_p показва ниски възможности на процеса, а индексът C_{pk} – 4% несъответствие, въпреки че опитните данни не потвърждават това - стойностите са разположени изцяло между границите LSL и USL.



фиг.48

За да бъде коректно проведен статистическия анализ върху данни с разпределение различно от нормалното са възможни три подхода:

- провеждане на предварително изследване за определяне на вида на закона на разпределение на опитните данни чрез проверка на хипотези, използвайки χ^2 -критерия или други методи и използване на съответните зависимости за потвърденото разпределение;
- оценка на областта от кривата на разпределение, която съответства на зона на разсейване 6σ за нормалното разпределение;
- трансформиране (преобразуване) на данните за получаване на нормално разпределение и използване на общоприетите и стандартизирани зависимости.

Първият подход има недостатъка, че за различните закони на разпределение се използват различни зависимости. Освен това проверката на хипотезата за вида на закона на разпределение е трудоемка задача и изисква значителен опит. Ако хипотезата не са потвърди се издига нова хипотеза и това продължава до потвърждаване на издигнатата за вида на закона на разпределение хипотеза.

Вторият подход не изисква познаване на закона на разпределение. Достатъчно е да се определят 0,135 и 99,865 проценти на опитните данни. Този метод е известен като метод на Клемент и е подходящ за оценка на зоната на разсейване на опитните данни, която се определя чрез разликата между 99,865 и 0,135 проценти, а центърът на групиране се оценява чрез 50 процентил (медианата). Предимствата и недостатъците му са аналогични с тези, при които за оценка на разсейването се използва размаха. За примера от фиг.47 зоната на разсейване, определена по този метод е 25,57, а индексите $C_p=1,56$, $C_{pk}=1,34$, т.е може да се направи заключението, че процесът е с добри възможности за осигуряване на желаното качество.

При третия подход данните се преобразуват по такъв начин, че да се получи приблизително нормално разпределение, като за целта с тях се извършват определени математически операции. Един от най-разпространените методи за такова преобразуване е методът Вох-Сох, разработен от Джорж Бокс и Дейвид Кокс. При този метод всяка от стойностите x на оригиналните данни се преобразува в y чрез повдигане на степен λ или се логаритмува, ако $\lambda=0$, т.е.

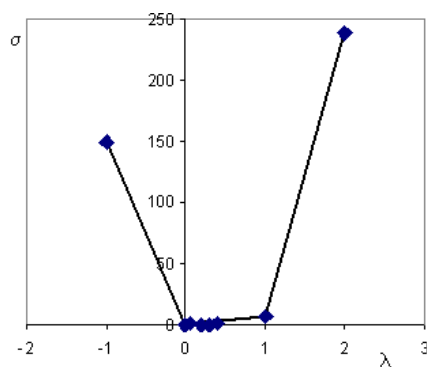
$$y = x^\lambda, \text{ когато } \lambda \neq 0$$

и

$$y = \ln x, \text{ когато } \lambda = 0.$$

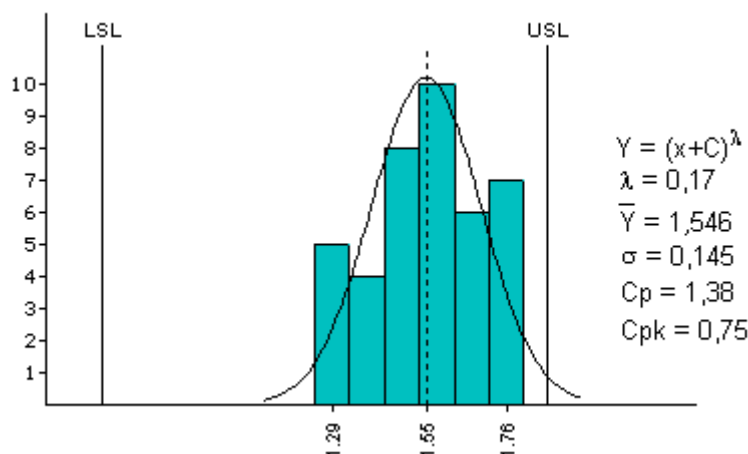
λ може да приема стойности $-5 \leq \lambda \leq +5$, като от избора на степенния показател λ зависи до каква степен преобразуваните данни имат разпределение близко до нормалното. Обикновено се

избира такава стойност на степенния показател λ , при която стандартното отклонение на преобразуваните данни е най-малко.



фиг.49

Ограничително условие за прилагане на метода Вох-Сох е стойностите на данните да бъдат положителни ($x_i > 0$). Но това условие лесно може да се изпълни чрез добавяне на константа към стойностите на всички данни преди повдигането на степен, т.е $y = (x+C)^\lambda$.



фиг.50

На фиг.50 е показана хистограмата на данните от фиг.48, преобразувани по метода Вох-Сох. При проверка хипотезата за нормално разпределение не се отхвърля, т.е може да се счита, че преобразуваните данни имат нормално разпределение и стандартизираните статистически методи могат да се приложат. Индексът на възможностите на процеса, определен на база преобразуваните данни е $C_p = 1,38$, а процента несъответствия – 1,5%.

Друг известен метод за преобразуване на данни с оглед получаване на нормално разпределение е метода на Джонсън. Той включва семейство от три криви: s_b , s_u , s_L , приложими съответно за гама или бета разпределения и разпределение на Стюдент или разпределения близки до нормалното.

$$y = \gamma + \eta \ln[(x - \epsilon) / (\lambda + \epsilon - x)] \text{ за криви } s_b;$$

$$y = \gamma + \eta \sinh^{-1}[(x - \epsilon) / \lambda] \text{ за криви } s_u;$$

$$y = \gamma + \eta \ln[(x - \epsilon) / \lambda] \text{ за криви } s_L,$$

където y е преобразуваната стойност, x – променливата, която се преобразува, γ , η , ϵ и λ - параметри на кривите на Джонсън.

При провеждане на статистически анализ на данни е необходимо да се направи проверка за вида на закона на разпределение, който може да окаже съществено влияние върху зоната на разсейване. Затова при сравняване на реалното разсейване с допустимото, при статистическата проверка за съответствие, при определянето на контролните граници за

статистическо управление на процесите и др., ако данните, представени чрез хистограма показват отклонение от нормалното разпределение или при проверката, хипотезата за нормалност бъде отхвърлена, е необходимо преобразуването им за получаване на разпределение, близко до нормалното. Едва след това могат да се обработват и анализират. Препоръчва се представянето на данните след направения анализ да става в оригиналния им вид след орнатното им преобразуване. В случаите, когато оценяваните статистически параметри са безразмерни величини (каквито са например индексите на възможностите на процеса), такова обратно преобразуване не е необходимо.

В редица софтуерни продукти за статистическа обработка на данни са включени и модули за преобразуване на данни с разпределения различни от нормалното, използвайки посочените методи. Използването на такива продукти значително облекчава процеса на преобразуване. За преобразуването на данните по методите Box-Cox и Клемент могат да се използват и вградените в Excel функции POWER и PERCENTILE.

5.7. Дисперсионен, корелационен и регресионен анализ

С помощта на статистически хипотези може да се провери влиянието на един или друг фактор върху показателите на качеството. *Дисперсионният анализ* се използва за определянето на значимите влияещи фактори.

Всяка случайна величина x може да се разглежда като случайна функция на много и различни по характер фактори. Част от тези фактори оказват незначително влияние върху x и по същество обуславят нейния случаен характер. Друга част от факторите обаче оказват съществено влияние върху математическото очакване на случайната величина x . Изследването на влиянието на различни по брой и характер фактори по отношение изменението на математическото очакване представлява основна задача на дисперсионния анализ.

За провеждането на такъв анализ е необходимо да бъдат изпълнени следните предпоставки: нормален закон на разпределение; постоянство на дисперсията; независимост на извадките. Нарушаването на тези предпоставки води до известни отклонения на направените статистически изводи.

Обикновено проверката на изпълнението на тези предпоставки изисква голям брой наблюдения и изчисления и практически рядко се извършва такава проверка. Но редица проведени изследвания за устойчивостта на статистическите изводи от дисперсионния анализ показват, че той е малко чувствителен към отклоненията от нормално разпределение на наблюдаваната случайна величина, а при еднакъв обем на извадките и към непостоянство на дисперсията. Това обуславя широкото и ефективно приложение на дисперсионния анализ в практиката.

В зависимост от броя на изучаваните влияещи фактори дисперсионният анализ бива еднофакторен и многофакторен. При еднофакторния дисперсионен анализ се изследва влиянието върху математическото очакване на случайната величина x на един фактор A , който приема k различни стойности $A_1, A_2, \dots, A_k$. Тези стойности могат да не се оценяват количествено, а да се разглеждат като k условни нива. За всяко от нивата се правят случайни извадки с обем n и се подлагат на наблюдение (определят се оценките на математическото очакване). Поставя се задачата да се провери дали влиянието на различните стойности (нива) на фактора A е довело до получаването на различни стойности на математическото очакване на случайната величина x или не. По същество тази задача представлява типичен случай на статистическа проверка на хипотезата (обикновено приемана за нулева), че математическите очаквания при изследваните k случая са равни помежду си.

В резултат на осъществените за всяко ниво на фактора A k случайни извадки с обем n се получават k групи по n данни x_{ij} за случайната величина x , които могат да бъдат представени във вида, показан на табл.3. Средните стойности $\bar{x}_i$ се използват за оценка на математическото очакване.

Всеки резултат x_{ij} може да бъде представен във вид на линеен модел, т.е. като сума от три величини: $x_{ij} = M + \alpha_i + \varepsilon_{ij}$, където M е математическото очакване на x , α_i е константа, отразяваща увеличение или намаление на математическото очакване M при i -то ниво на фактора, а ε_{ij} е грешката на линейния модел. Числените характеристики M , α_i , и ε_{ij} , са неизвестни и могат да бъдат оценени с помощта на статистическите оценки $\bar{X}$, $\bar{x}_i - \bar{X}$, и $x_{ij} - \bar{x}_i$:

$$x_{ij} = \bar{X} + (\bar{x}_i - \bar{X}) + (x_{ij} - \bar{x}_i).$$

Таблица 3

Номер на наблюдението (j)	Стойности (нива) на фактора A (i)						
	A ₁	A ₂	...	A _i	...	A _k	
1	x ₁₁	x ₂₁	...	x _{i1}	...	x _{k1}	
2	x ₁₂	x ₂₂	...	x _{i2}	...	x _{k2}	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
n	x _{1n}	x _{2n}	...	x _{in}	...	x _{kn}	
Средна стойност	$\overline{x_1}$	$\overline{x_2}$	...	$\overline{x_i}$	...	$\overline{x_k}$	$\overline{X}$

Основното уравнение на еднофакторния дисперсионен анализ има вида: $Q = Q_A + Q_R$, където Q е обща сума на квадратите, Q_A - сума на квадратите между групите, Q_R - остатъчна сума на квадратите.

Обработването на данните се извършва в следния ред [4]:

- Определя се общата сума на квадратите Q , която представлява сума от квадратите на отклоненията на всички наблюдения x_{ij} от тяхната средна стойност $\bar{X}$:

$$Q = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{X})^2$$

$$\bar{X} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \bar{x}_i$$

където

- Определя се сумата на квадратите между групите Q_A като сума от квадратите на отклоненията на средните стойности по групи $\bar{x}_i$ от общата средна стойност $\bar{X}$:

$$Q_A = n \sum_{i=1}^k (\bar{x}_i - \bar{X})^2$$

Тя характеризира влиянието на различните стойности (нива) на фактора A върху изменението на математическото очакване на групите по отношение на общото математическо очакване на случайната величина x .

- Определя се остатъчната сума на квадратите Q_R , като сума от квадратите на отклоненията на всяко наблюдение x_{ij} от средната стойност $\bar{x}_i$ на i -тата група:

$$Q_R = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_i)^2$$

Тя характеризира остатъчното разсейване на случайната величина x , породено от действието на случайната грешка ε_{ij} .

- Определят се степените на свобода v , v_A и v_R , т.е. броят на независимите величини, участващи в образуването на сумите на квадратите Q , Q_A и Q_R :

$$\begin{aligned} v &= kn - 1; \\ v_A &= k - 1; \\ v_R &= k(n - 1). \end{aligned}$$

- Определят се статистическите оценки на дисперсията на случайната величина x чрез отношенията на сумите на квадратите Q , Q_A , Q_R и съответните степени на свобода v , v_A и v_R :

$$s^2 = \frac{Q}{v} = \frac{Q}{kn - 1}; \quad s_A^2 = \frac{Q_A}{v_A} = \frac{Q_A}{k - 1}; \quad s_R^2 = \frac{Q_R}{v_R} = \frac{Q_R}{k(n - 1)},$$

които се наричат съответно обща оценка на дисперсията (s^2), оценка на дисперсията по факторите (s_A^2) и остатъчна оценка на дисперсията (s_R^2).

Резултатите от обработката на данните при еднофакторния дисперсионен анализ обикновено се представят във вида, показан на табл.4.

Таблица 4

Сума на квадратите		Степени на свобода	Оценки на дисперсиите
Обща	Q	$v = kn - 1$	$s^2 = Q/v$
По фактори	Q_A	$v_A = k - 1$	$s_A^2 = Q_A/v_A$
Остатъчна	Q_R	$v_R = k(n - 1)$	$s_R^2 = Q_R/v_R$

За проверка на нулевата хипотеза обикновено се използва F-критерия, основан на разпределението на Фишер. За целта се определя дисперсионното отношение (F - отношение):

$$F = \frac{s_A^2}{s_R^2},$$

което се сравнява с критичната стойност F_T на разпределението на Фишер в зависимост от степените на свобода v_A и v_R и избрано ниво на значимост (вероятност за грешка от I род - неправилно отхвърляне на вярна нулева хипотеза). Ако $F < F_T$ няма основание да не се приеме нулевата хипотеза и следователно влиянието на фактора A не може да се счита за съществено. Ако $F > F_T$ нулевата хипотеза се отхвърля и се приема алтернативната H_1 , т.е. има всички основания да се смята, че факторът A влияе съществено върху математическото очакване на x , което не може да се обясни само със случайния характер на извадките.

Целта на дисперсионния анализ е проверка на статистическата значимост на разликите между средните стойности, получени при различните нива на изследвания фактор. Тази проверка се извършва посредством разделяне на сумата на квадратите на компоненти, т.е. посредством разделяне на общата дисперсия на части, едната от които е обусловена от случайни грешки, а втората е свързана с разликите в средните стойности. Дисперсията на извадка се определя от зависимостта:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2.$$

При фиксиран обем на извадката n дисперсията е функция на сумата на квадратите на отклоненията.

Ако се разгледа следният пример:

	Група A ₁	Група A ₂
Наблюдение 1	2	6
Наблюдение 2	3	7
Наблюдение 3	1	5
Средна стойност $\bar{x}_i$	2	6
Сума на квадратите	2	2
Обща средна стойност $\bar{X}$	4	
Обща сума на квадратите Q	28	

Средните $\bar{x}_i$ за двете групи A₁ и A₂ се различават. Сумата на квадратите на отклоненията вътре във всяка група са равни на 2. Общата сума на квадратите на отклоненията от общата средна стойност, без да се отчита груповата принадлежност е 28. Сумата на квадратите (дисперсията), основана на вътрешногруповата изменчивост има по-малка стойност отколкото общата сума на квадратите, изчислена на базата на общата изменчивост (спрямо общото средно). Общата сума на квадратите Q=28 се разделя на две съставляващи: сума на квадратите, обусловена от вътрешногруповата изменчивост ($Q_R=2+2=4$) и сума на квадратите, обусловена от разликата в средните стойности на групите ($Q_A=28-(2+2)=24$). Сумата на квадратите, обусловена от вътрешногруповата изменчивост обикновено се нарича остатъчна сума на квадратите и характеризира грешката на експеримента.

За статистическа оценка на дисперсиите s^2 , s_A^2 и s_R^2 се използват отношенията на сумите на квадратите към степените на свобода (броят на независимите величини, участващи при определянето на сумите на квадратите). За разгледания пример общата сума Q се определя от $3 \cdot 2 = 6$ независими наблюдения, но във формулата за Q участва и една линейна зависимост $\bar{X} = 1/6(x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{21}+x_{22}+x_{23})$, поради което броят на независимите величини е $v=kn-1=6-1=5$.

С помощта на F-критерия се оценява статистическата значимост на разликата в средните стойности на групите.

Случаите в които върху едно явление оказва влияние само един фактор са твърде редки. Обикновено се налага изследването на влиянието на множество фактори. За целта може да се приложи еднофакторният дисперсионен анализ за всеки фактор поотделно, но такъв подход води до ненужно увеличаване на обема на наблюденията и не дава възможност за изучаването на съвместното влияние на група фактори.

Многофакторният дисперсионен анализ е особено ефективен метод за едновременното изучаване на влиянието на няколко фактора A, B, C, ... , всеки поотделно и техни съчетания, върху математическото очакване на случайната величина x. При него в повечето случаи не са необходими паралелни наблюдения за всяка комбинация от нива на факторите, което води до значително намаляване на общия обем наблюдения. Съществува възможност така да се планират и проведат експериментите, че при минимален брой наблюдения да се извлече максимална информация за влиянието на всеки фактор и техни взаимодействия.

Задачата на многофакторния дисперсионен анализ се състои в потвърждаването или отхвърлянето на редица от хипотези за влиянието на множество фактори и техни взаимодействия. За нулеви хипотези се приемат твърденията, че факторите (поотделно и в съчетания) не оказват влияние върху математическото очакване. Данните от проведените наблюдения могат да бъдат представени в таблица (или група таблици) от вида:

Таблица 5

		i							
		A ₁		A ₂			A _k		
l	B ₁	X ₁₁₁ ,X ₁₁₂ ,..., X _{11n}		X ₂₁₁ ,X ₂₁₂ ,..., X _{21n}			X _{k11} ,X _{k12} ,..., X _{k1n}		$\overline{X}_{01}$
	B ₂	X ₁₂₁ ,X ₁₂₂ ,..., X _{12n}		X ₂₂₁ ,X ₂₂₂ ,..., X _{22n}			X _{k21} ,X _{k22} ,..., X _{k2n}		$\overline{X}_{02}$
	B _q	X _{1q1} ,X _{1q2} ,..., X _{1qn}		X _{2q1} ,X _{2q2} ,..., X _{2qn}			X _{kq1} ,X _{kq2} ,..., X _{kqn}		$\overline{X}_{0q}$
		$\overline{X}_{10}$		$\overline{X}_{20}$			$\overline{X}_{k0}$		$\overline{X}$

Общият брой наблюдения N при два фактора A и B (к нива на фактора A и q нива на фактора B) ще бъде N=nkq.

При двуфакторният дисперсионен анализ всеки резултат от наблюденията може да бъде представен чрез следния модел:

$$x_{ilj} = M + \alpha_i + \beta_l + \alpha\beta_{il} + \epsilon_{ilj},$$

в който M е общото математическо очакване на x, α_i отразява изменението на M под влиянието на i-то ниво на фактора A, β_l отразява изменението на M под влиянието на l-то ниво на фактора B, ϵ_{ilj} отразява случайното изменение на x, а $\alpha\beta_{il}$ отразява съвместното влияние на факторите A и B (по-точно на i-то ниво на A и l-то ниво на B). За да се проведе в пълен вид (с отчитане на взаимодействието) двуфакторният дисперсионен анализ, са необходими паралелни наблюдения, т.е. $n \geq 2$. При повече от два фактора (многофакторен дисперсионен анализ) това изискване не е необходимо и много често наблюденията не се дублират.

Основното уравнение на дисперсионния анализ при два фактора с отчитане на взаимодействието има вида: $Q = Q_A + Q_B + Q_{AB} + Q_R$, където Q, Q_A , Q_B , Q_{AB} , Q_R са суми на квадратите – съответно обща сума на квадратите, сума на квадратите между групите на фактора A, сума на квадратите между групите на фактора B, сума на квадратите между групите на взаимодействието на A и B и остатъчна сума на квадратите:

$$Q = \sum_{i=1}^k \sum_{l=1}^q \sum_{j=1}^n (x_{ilj} - \bar{X})^2$$

$$Q_A = nq \sum_{i=1}^k (\bar{x}_{io} - \bar{X})^2$$

$$Q_B = nk \sum_{l=1}^q (\bar{x}_{ol} - \bar{X})^2$$

$$Q_{AB} = n \sum_{i=1}^k \sum_{l=1}^q (\bar{x}_{il} - \bar{x}_i - \bar{x}_{ol} + \bar{X})^2$$

$$Q_R = \sum_{i=1}^k \sum_{l=1}^q \sum_{j=1}^n (x_{ilj} - \bar{x}_{il})^2$$

Броят на степените на свобода на тези суми на квадрати са съответно:

$$v = N - 1; \quad v_A = k - 1; \quad v_B = q - 1; \quad v_{AB} = (k - 1)(q - 1); \quad v_R = kq(n - 1).$$

За оценка на дисперсията се използват отношенията на сумите на квадратите и съответните степени на свобода:

$$s^2 = Q/v; \quad s_A^2 = Q_A/v_A; \quad s_B^2 = Q_B/v_B; \quad s_{AB}^2 = Q_{AB}/v_{AB}; \quad s_R^2 = Q_R/v_R.$$

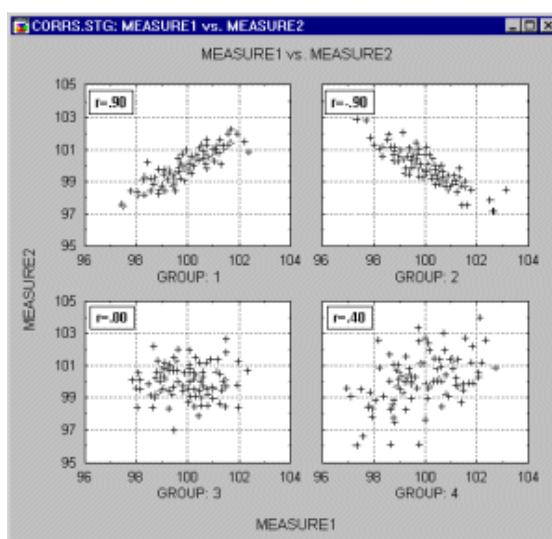
С помощта на F-критерия се проверяват три хипотези (фактора A, фактора B и взаимодействието AB не оказват влияние върху математическото очакване) чрез сравняване на отношенията $F_A = s_A^2/s_R^2$, $F_B = s_B^2/s_R^2$, $F_{AB} = s_{AB}^2/s_R^2$ с табличните стойности F_A^T , F_B^T , F_{AB}^T ,

определени от таблиците за F-разпределение. Решенията за приемането или отхвърлянето на всяка от трите хипотези се вземат поотделно и независимо.

Чрез дисперсионния анализ се определя влияе ли даден фактор или не върху определен показател на качеството, но не и как влияе, т.е. силата и формата на връзката. Това може да стане с помощта на *корелационния анализ*.

Връзката, изразяваща изменението на средната стойност на една величина при изменение на друга величина се нарича корелационна връзка. Графичното представяне на съвкупността от всички точки (x_i, y_i) , получени при наблюдението се нарича диаграма на разсейване (корелационно поле) и дава визуална представа за връзката между величините **x** и **y** (фиг.51).

Съществуването на корелационна връзка между величините **x** и **y**, формата (линейна или нелинейна) и нейната сила се определят с помощта на коефициента на корелация r_{xy} и корелационното отношение γ .



Фиг.51 – Диаграми на разсейване

Коефициентът на корелация се определя по зависимостта:

$$r_{xy} = \frac{C_{xy}}{s_x s_y},$$

където s_x и s_y са средноквадратичните отклонения съответно за променливите **x** и **y**, а C_{xy} е ковариация на случайните величини **x** и **y**:

$$C_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

Коефициентът на корелация има стойност в границите $-1 < r_{xy} < +1$. Колкото е по-близък да +1, толкова е по-силна положителната линейна корелационна връзка (с нарастването на **x** нараства и **y**). Колкото r_{xy} е по-близък до -1, толкова е по-силна отрицателната линейна корелационна връзка (с нарастването на **x** намалява **y**). При $r_{xy}=1$ между величините **x** и **y** съществува линейна функционална зависимост. При стойности на коефициента на корелация близки до нула може да се предполага или наличие на нелинейна корелационна връзка, или въобще отсъствие на връзка. В такъв случай r_{xy} се сравнява с корелационното отношение, което се определя от зависимостта:

$$\eta_y = \frac{S(\bar{y}_x)}{S_y},$$

където:

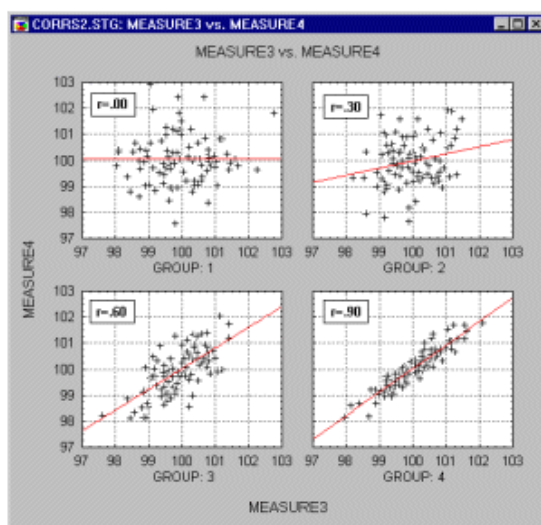
$$S(\bar{y}_x) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^p v_j (\bar{y}_{xi} - \bar{y}^2)}; \quad \bar{y}_{xi} = \frac{1}{v_i} \sum_{j=1}^q y_j v_{ij}$$

Корелационното отношение е в границите $0 \leq \eta_y \leq 1$, при това $\eta_y \geq |r_{xy}|$. При $\eta_y = 0$ между величините x и y отсъства връзка, а при $\eta_y = 1$ между x и y съществува еднозначна функционална връзка, която при $r_{xy} = 0$ е нелинейна.

За изследването на връзката между повече от две величини (например връзката на y с два фактора x_1 и x_2) се използва коефициентът на множествена корелация R_{yx1x2} , който се определя чрез коефициентите на корелация r_{yx1} , r_{yx2} и r_{x1x2} :

$$R_{yx1x2} = \sqrt{\frac{r_{yx1}^2 + r_{yx2}^2 - 2r_{yx1}r_{x1x2}}{1 - r_{x1x2}^2}}$$

При наличие на функционална зависимост между две величини, математическият модел (уравнението на регресия) на тази зависимост може да бъде определен чрез използване на *регресионен анализ* - метод посредством който се определят коефициентите на уравнението на регресия. По строго определение на понятието регресия е следното: регресия на y по отношение на x се нарича условното математическо очакване на случайната величина y при условие, че x приема зададени стойности.



Фиг.52 – Линии на регресия

Един от често използваните регресионни модели е полином от m -та степен, който има вида:

$$y = f_m(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m$$

За определянето на коефициентите на уравнението на регресия $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$ се използва методът на най-малките квадрати. Основно изискване на метода е сумата от квадратите на отклоненията между опитно получените стойности и тези, определени по уравнението на регресия да бъде минимална. Коефициентите $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$ се определят чрез решаване на системата от $(m+1)$ уравнения:

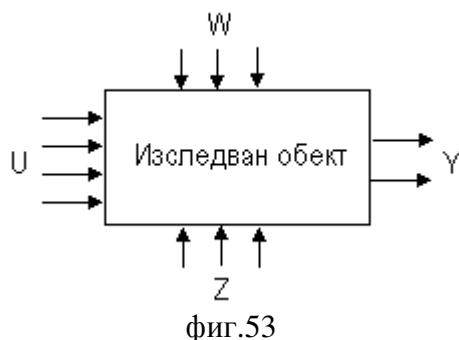
Оценката на средноквадратичното отклонение на опитните данни от данните, получени по уравнението на регресия се определя от изрази:

$$s_m = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n [y_i - f_m(x_i)]^2}{n - (m + 1)}}.$$

Регресионният анализ се прилага за математическо моделиране на процеси при тяхното проектиране, за описание на предавателната характеристика на измервателни средства, за определяне на апроксимиращата права при съставяне на някои видове контролни карти и др.

6. ОСНОВИ НА ПЛАНИРАНЕТО НА ЕКСПЕРИМЕНТА

Експериментът е система от наблюдения, извършвани с цел получаване на информация относно изследвания обект. При провеждането на експеримента обикновено механизмът на изучавания процес е известен частично или е съвсем неизвестен. В този случай изследвания обект може условно да се представи като “черна кутия” – системата от вътрешни връзки е недостъпна (или частично неизвестна) за изследователя. Известни са променливите величини, въздействащи върху обекта на изследване и величините, характеризиращи неговото състояние (фиг.53). Първите се наричат входни величини или фактори U,W,Z, а вторите – изходни величини или реакция Y.



Факторите се делят на три групи:

- група постоянни или случайно изменящи се в хода на изследването фактори W, стойностите на които са известни;
- група управляеми фактори U, стойностите на които се избират и целенасочено се изменят в хода на изследването (двете първи групи често се обединяват в една група *контролируеми* фактори X);
- група на *неконтролируеми* фактори Z, стойностите на които остават по една или друга причина неизвестни в хода на изследването.

Изменението на изходните величини (реакцията) Y под действие на монотонно изменящи се във времето неконтролируеми фактори се нарича *временен дрейф*, а зависимостта на математическото очакване на реакцията от контролируемите фактори – *функция на реакцията*.

Фиксираните стойности на фактора се наричат *нива на фактора*. Множеството от нива на факторите, при които се извършва измерване на реакцията се задава с матрица на условията на експеримента. Тази матрица при k фактора и m опита има вида:

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{21} & X_{31} & \dots & X_{k1} \\ X_{12} & X_{22} & X_{32} & \dots & X_{k2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{1m} & X_{2m} & X_{3m} & \dots & X_{km} \end{bmatrix}$$

Стойностите на реакцията, получени при измерванията, също се представят с матрица, наричана матрица на наблюденията:

$$Y = \begin{vmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \dots \\ Y_m \end{vmatrix}$$

По характера на организация и методите за обработване на резултатите експериментите се делят на *пасивни* и *активни*.

При пасивния експеримент изследователят наблюдава обекта, без да се намесва в процеса на неговото функциониране. Доколкото нивото на факторите по случаен или закономерен начин се променят във времето, то измервайки техните стойности и стойността на реакцията се изследва зависимостта между факторите и реакцията. Планирането на пасивен експеримент се свежда до определяне на броя на опитите, необходим за провеждане на изследването.

Целта на експеримента може да бъде или определяне на връзката между реакцията и влияещите фактори или такова съчетание на нивата на управляемите фактори, при което да се постигне оптимална (екстремална – минимална или максимална) стойност на Y . Връзката между реакцията и влияещите фактори може да бъде функционална или стохастична. При функционална връзка на всяка стойност X_i еднозначно съответства стойност Y_i . В този случай ако условията на експеримента са абсолютно еднакви, при многократно повторение на опитите се получават едни и същи стойности на реакцията. За съжаление на практика трудно може да се осъществи поддържането на постоянни условия. Дори влиянието на всеки отделен случаен фактор да е малко, то съвкупността на всички фактори може съществено да повлияе на резултатите от експеримента. В този случай връзката се счита за стохастична. При стохастична връзка X_i са случайни величини и Y_i приема не една конкретна стойност, а някаква от множество стойности. Стохастичност на връзката може да се дължи както на грешки при измерването, на непълнота на модела и отчитаните фактори, така и на случайния характер на изследвания процес. Анализът на стохастична връзка се извършва с методите на корелационния, регресионния и дисперсионния анализи.

При провеждането на *активен експеримент* изследователят преднамерено променя нивата на факторите и ги поддържа на нужното ниво по време на експеримента. Към контролируемите фактори се предявяват следните изисквания, които трябва да се отчитат при подготовката на активен експеримент:

- управляемост на фактора – възможност да се поддържа определеното ниво на фактора в течение на необходимото за измерване време
- достатъчно висока точност с която да се поддържа и измерва нивото на фактора
- независимост на фактора – възможност да се задава нивото на фактора независимо от нивата на други фактори
- съвместимост на факторите - безопасно функциониране на обекта на изследване и възможност за измерване на реакцията при всички избрани нива на факторите.

Нивата на факторите могат да бъдат изразявани количествено с тяхната числена стойност, но могат да бъдат изразявани и качествено, като във втория случай на всяко ниво се присвоява определен код. Например ако качествен фактор е вид на материала и той приема три нива, това могат да бъдат материали с код А, В и С.

За опростяване на пресмятанията при обработката на резултатите се препоръчва количествените фактори да се преобразуват в безразмерни величини и по възможност с целочислени стойности. Такова преобразуване може да се извърши по формулата:

$$x_{ij} = \frac{(X_{ij} - \bar{X}_j)}{\Delta X_j},$$

където x_{ij} – преобразуваното i -то ниво на j -ти фактор; X_{ij} – натуралната стойност на i -то ниво на j -ти фактор; ΔX_j – постоянната стъпка на изменение на натуралната стойност на j -ти фактор; r – брой на нивата на фактора;

$$\overline{X}_j = \frac{1}{r} \sum X_{ij}$$

Например, ако фактора j има $r=5$ нива с натурални стойности 5,2; 10,2; 15,2; 20,2; 25,2 със стъпка $\Delta X_j=5$, то преобразуваните стойности ще бъдат: $x_{1j}=(5,2-15,2)/5=-2$; $x_{2j}=-1$; $x_{3j}=0$; $x_{4j}=1$; $x_{5j}=2$.

За да бъдат преобразуваните стойности цели числа се препоръчва броя на нивата на факторите r да бъде нечетно число.

Преобразуването може да се извърши и по формулата:

$$x_{ij} = 1 + \frac{X_{ij} - X_{j\min}}{\Delta X_j}$$

където $X_{j\min}$ е минималното ниво на j -ти фактор

Тогава за горния пример преобразуваните стойности ще бъдат 1, 2, 3, 4, 5.

При планирането на експеримента най-често се използват планове от първи порядък. Това са такива планове, които позволяват да се проведе експеримент за определяне на уравнението на регресия, което е полином от първа степен. Минималният необходим брой нива на факторите е с единица по-голям от порядъка на уравнението на регресия. Така например за полином от първа степен, минималният брой нива на факторите е два.

Етапите за провеждане на експеримента са следните:

- избор на основните фактори и техните нива
- планиране и провеждане на експеримента
- определяне на коефициентите на уравнението на регресия
- статистически анализ на резултатите от експеримента

Таблица 6

Тип на плана	№ на опита	Фактори			
		x_1	x_2	x_3	x_4
2^2	1	-1	-1	-1	-1
	2	+1	-1	-1	-1
	3	-1	+1	-1	-1
	4	+1	+1	-1	-1
2^3	5	-1	-1	+1	-1
	6	+1	-1	+1	-1
	7	-1	+1	+1	-1
	8	+1	+1	+1	-1
2^4	9	-1	-1	-1	+1
	10	+1	-1	-1	+1
	11	-1	+1	-1	+1
	12	+1	+1	-1	+1
	13	-1	-1	+1	+1
	14	+1	-1	+1	+1
	15	-1	+1	+1	+1
	16	+1	+1	+1	+1

Пълен факторен експеримент е експеримент при който се реализират всички възможни неповтарящи се комбинации на нивата на независимите фактори. Броят на опитите в този случай е $m=2^k$, където k е броят на факторите. В табл.1 са показани матриците 2^2 , 2^3 и 2^4 за пълен факторен експеримент при две нива на факторите (+1 и -1). При построяването на тези матрици в първата колона знаците + и – се редуват през едно, във втората – през две, в третата през четири и т.н. Съществуват и други методи за построяване на матрицата.

В табл.7 е дадена разширена матрица на пълен факторен експеримент 2^3 с която е възможно да се определят и ефектите от взаимодействие на факторите, което характеризира

влиянието на даден фактор в зависимост от нивата на другите фактори. Знаците в стълбовете на взаимодействие се получават чрез умножение на съответните множители.

Таблица 7

	x ₁	x ₂	x ₃	x ₁ x ₂	x ₁ x ₃	x ₂ x ₃
1	+	+	+	+	+	+
2	-	+	+	-	-	+
3	+	-	+	-	+	-
4	-	-	+	+	-	-
5	+	+	-	+	-	-
6	-	+	-	-	+	-
7	+	-	-	-	-	+
8	-	-	-	+	+	+

Ако се разгледа частният случай, когато реакцията линейно зависи от три независими контролируеми и управляеми фактори, уравнението на регресия има вида:

$$Y = a_0 + \sum_{i=1}^3 a_i x_i + \sum_{i,u=1}^3 a_{iu} x_i x_u + a_{123} x_1 x_2 x_3$$

Планът за пълен факторен експеримент има вида:

Таблица 8

№ на опита	x ₀	x ₁	x ₂	x ₃	x ₁ x ₂	x ₁ x ₃	x ₂ x ₃	x ₁ x ₂ x ₃	Резултат
1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	y ₁
2	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	y ₂
3	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1	y ₃
4	+1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	-1	y ₄
5	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	y ₅
6	+1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	-1	y ₆
7	+1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	y ₇
8	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	y ₈

Тук е добавена колона на фиктивна променлива x₀, необходима за оценка на свободния член a₀ от уравнението на регресия. След реализиране на плана се получават осем уравнения с осем неизвестни, и от решаването на тези уравнения се намират всички осем коефициенти на уравнението на регресия. План в който броя на опитите е равен на броя на определяните коефициенти се нарича наситен.

Членовете в уравнението на регресия, съдържащи произведенията x₁ x₂; x₂ x₃ и т.н. отразяват двойните взаимодействия на факторите, а членовете x₁ x₂ x₃ – отразява тройно взаимодействие.

Коефициентите в уравнението на регресия се определят от зависимостите, посочени в т.5.

Непълен (дробен) факторен експеримент

В много практически задачи взаимодействията от втори и висш порядък отсъстват или са пренебрежимо малки. Освен това, на първия етап от изследванията често е необходимо да се намери в първо приближение линейната апроксимация на изучаваната зависимост при минимален брой опити. Тогава например за три фактора уравнението на регресия има вида:

$$Y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3$$

и трябва да се определят само четири коефициента. За това са достатъчни четири опита (докато при пълния факторен експеримент бяха необходими 2^k=8 опита).

Матрицата при пълен факторен експеримент 2^2 позволява да се построи математическия модел:

$$Y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_{12}x_1x_2$$

Ако се приеме, че зависимостта на реакцията от двата фактора може да бъде описана с линеен модел, то е достатъчно да бъдат определени три коефициента – a_0 , a_1 и a_2 . При това ефекта на взаимодействие е незначителна величина, т.е. $a_{12} \rightarrow 0$. Това предположение позволява да се включи в схемата на експеримента нов фактор x_3 , на който се приписват нива, съответстващи на x_1x_2 , т.е. може да се счита, че $x_3 = x_1x_2$. По такъв начин матрицата 2^2 позволява да се изследва влиянието на 3 фактора и получения модел ще има вида:

$$Y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$$

Таблица 9

№ на опита	x_0	x_1	x_2	$x_3 = x_1x_2$	Резултат
1	+1	-1	-1	+1	y_1
2	+1	+1	-1	-1	y_2
3	+1	-1	+1	-1	y_3
4	+1	+1	+1	+1	y_4

При построяването на такива планове в колоната на въведения нов фактор трябва да бъде това взаимодействие, което може да се пренебрегне.

Броят на опитите при дробен факторен експеримент е 2^{k-p} , където: k - броя на факторите; p – брой на факторите, приравнени към ефекти на взаимодействие. Тук не се използват всички възможни комбинации на нивата на факторите.

Обработка на резултатите от активен експеримент

Избират се основните фактори и техните нива на вариране. Като фактори могат да се избират само контролируеми и управляеми фактори, т.е. такива, които изследователят може да поддържа постоянни на зададено ниво по време на провеждане на опита. Като фактори трябва да бъдат включени тези, които оказват най-силно влияние върху реакцията. Тези фактори могат да бъдат определени чрез проведен дисперсионен анализ. Друго условие е възможността за независимо изменение на нивото на всеки фактор. За всеки фактор се указва интервала на изменение, в границите на който се извършва изследването. Съставя се план на експеримента и се провежда експеримента, като за всеки опит се правят по m повторения (паралелни наблюдения) и се определя средноаритметичното $\bar{y}$.

Табл.10

№ на опита	x_0	x_1	x_2		x_k	Опит1 y_1	Опит2 y_2	y_i	Опит n y_n	$\bar{y}_j$	Модел Y_j	Дисперсия S_j^2
1	+1	-1	-1							$\bar{y}_1$	Y_1	S_1^2
2	+1	+1	-1							$\bar{y}_2$	Y_2	S_2^2
	+1	-1	+1									
j	+1	+1	+1					y_{ij}		$\bar{y}_j$	Y_j	S_j^2
m										$\bar{y}_m$	Y_m	S_m^2

Определят се извадковите дисперсии $S_j^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_j)^2$ и се прави проверка на

хипотезата за еднородност на дисперсиите по критерия на Кохрен.

Определят се коефициентите в уравнението на регресия от зависимостите:

$$a_0 = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m y_j x_{0j}$$

$$a_1 = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m y_j x_{1j}$$

.....

$$a_{12} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m y_j (x_1 x_2)_j$$

$$a_{123} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m y_j (x_1 x_2 x_3)_j$$

и се изчисляват стойностите Y по уравнението на регресия.

Извадковата дисперсия се определя от зависимостта:

$$S_j^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_j)^2,$$

където $\bar{y}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_{ij}$ - средноаритметичното от n опита в точка с номер j

n – брой на повторенията (паралелните опити)

Дисперсията на възпроизводимост $S_{\text{възпр}}^2$ е средноаритметичната дисперсия от всички n различни варианти на опити:

$$S_{\text{възпр}}^2 = \frac{1}{m} \sum S_j^2 = \frac{1}{m(n-1)} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_j)^2$$

m – брой на опитите (вариантите)

За оценка на значимостта на коефициентите трябва да се определи дисперсията на коефициентите на регресия:

$$S_a^2 = \frac{1}{m \cdot n} S_{\text{възпр}}^2$$

Проверката на значимост на всеки коефициент се извършва с помощта на критерия на Стюдент (t -критерия). Намира се доверителния интервал на коефициента на регресия $\Delta_{aj} = t_{\alpha, m(n-1)} S_a$. Ако $|a_j| > \Delta_{aj}$, то коефициента е значим. Статистически незначимите коефициенти се изключват от уравнението на регресия.

Дисперсията за адекватност на модела (характеризираща разсейването на резултатите от експеримента спрямо уравнението на регресия) се определя от зависимостта:

$$S_{\text{адекв}}^2 = \frac{n}{m-l} \sum_{j=1}^m (\bar{y}_j - Y_j)^2$$

n - брой на опитите (вариантите); l – брой на членовете в уравнението на регресия (брой на коефициентите a_i).

Проверката за адекватност на модела се извършва с помощта на критерия на Фишер:

$$F = \frac{S_{\text{адекв}}^2}{S_{\text{възпр}}^2}$$

Ако $F < F_{\alpha, m_1, m_2}$ за съответните степени на свобода $m_1 = m - l$, $m_2 = m(n - 1)$, при зададено ниво на значимост α , то моделът се счита за адекватен. Ако адекватността на модела не се потвърди, се намалява интервала на вариране на факторите или се преминава към план от втори порядък.

Пример: Да се построи математически модел на зависимостта на якостта на опън σ_B на алуминиева сплав от съдържанието в нея на литий, температурата и времето на стареене.

	код	Фактори		
		Съдържание на литий, % x_1	Температура на стареене, °C x_2	Време на стареене, h x_3
Стъпка на вариране ΔX_i		0,5	25	2
Основно ниво	0	1	175	4
Горно ниво	+1	1,5	200	6
Долно ниво	-1	0,5	150	2

Кодирането на нивата на факторите се извършва по зависимостта: $x_i = \frac{(X_i - \bar{X}_i)}{\Delta X_i}$

Избира се дробен факторен план 2^{3-1}

№ на опита	x_0	x_1	x_2	$x_3=x_1x_2$	Опит1 y_1	Опит2 y_2	Опит3 y_3	$\bar{y}_j$	Модел Y_j	Дисперсия S_j^2
1	+1	-1	-1	+1	25	24	26	25	24,35	1
2	+1	+1	-1	-1	20	19	21	20	20,665	1
3	+1	-1	+1	-1	36	40	37	37,66	36,995	2.08
4	+1	+1	+1	+1	40	39	41	40	40,665	1

Определят се извадковите дисперсии $S_j^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_j)^2$

$$S_1^2=1; S_2^2=1; S_3^2=2,08; S_4^2=1$$

Прави се проверка на хипотезата за однородност на дисперсиите по критерия на Кохрен:

$$G = \frac{S_{j \max}^2}{\sum S_j^2} = \frac{2.08}{1+1+2.08+1} = 0.409$$

$G_{\alpha,p,n}=0,7679$; при $\alpha=0,05$, $p=n-1=2$, $m=4$. Тъй като $G < G_{\alpha,p,n}$ то дисперсиите са однородни.

Определят се коефициентите в уравнението на регресия $Y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$

$$a_0 = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \bar{y}_j x_{0j} = \frac{1}{4} (25 + 20 + 37.66 + 40) = 30.665$$

$$a_1 = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \bar{y}_j x_{1j} = \frac{1}{4} (-25 + 20 - 37.66 + 40) = -0.665$$

$$a_2 = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \bar{y}_j x_{2j} = \frac{1}{4} (-25 - 20 + 37.66 + 40) = 8.165$$

$$a_3 = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \bar{y}_j x_{3j} = \frac{1}{4} (25 - 20 - 37.66 + 40) = 1.835$$

Проверява се значимостта на коефициентите на уравнението на регресия, като предварително се определя дисперсията на възпроизводимост:

$$S_{\text{възпр}}^2 = \frac{1}{m} \sum S_j^2 = \frac{1}{4} (1+1+2,08+1) = 1,27$$

Дисперсията на коефициентите на уравнението на регресия е:

$$S_a^2 = \frac{1}{m.n} S_{\text{възпр}}^2 = \frac{1}{12} 1,27 = 0,1058$$

Намира се стойността на доверителния интервал на коефициента с помощта на критерия на Стюdent:

$$\Delta_{aj} = t_{\alpha, m(n-1)} \cdot S_a = t_{0,05;8} \cdot S_a = 2,3.0,1058^{1/2} = 2,3.0,33 = 0,759$$

Тъй като коефициентът $|a_1|$ е по-малък от 0,759, то той не е значим и може да бъде изключен от уравнението на регресия. Тогава уравнението на регресия добива вида:

$$Y = a_0 + a_2x_2 + a_3x_3 = 30,665 + 8,165.x_2 + 1,835 x_3$$

Резултатите за Y по получения модел са:

$$Y_1 = a_0 + a_2.(-1) + a_3.(+1) = 30,665 - 8,165 + 1,835 = 24,35$$

$$Y_2 = a_0 + a_2.(-1) + a_3.(-1) = 30,665 - 8,165 - 1,835 = 20,665$$

$$Y_3 = a_0 + a_2 \cdot (+1) + a_3 \cdot (-1) = 30,665 + 8,165 - 1,835 = 36,995$$

$$Y_4 = a_0 + a_2 \cdot (+1) + a_3 \cdot (+1) = 30,665 + 8,165 + 1,835 = 40,665$$

и са нанесени в таблицата.

Прави се проверка за адекватност на получения модел с помощта на критерия на Фишер, като предварително се определя дисперсията за адекватност:

$$S_{\text{адекв}}^2 = \frac{n}{m-l} \sum_{j=1}^m (\bar{y}_j - Y_j)^2 = \frac{3}{4-3} [(25 - 24,35)^2 + (20 - 20,665)^2 + (37,66 - 36,995)^2 + (40 - 40,665)^2] = 5,24$$

$$F = \frac{S_{\text{адекв}}^2}{S_{\text{възпр}}^2} = \frac{5,24}{1,27} = 4,126$$

$F_{\alpha, m1, m2} = F_{0,05; 1; 8} = 5,318$ при $\alpha = 0,05$; $m_1 = m - l = 4 - 3 = 1$; $m_2 = m(n-1) = 4(3-1) = 8$

Тъй като $F < F_{0,05; 1; 8}$ то адекватността на модела се потвърждава.

Планове от втори порядък

Ако адекватността на модела за полином от първа степен не се потвърди, се преминава към полином от втора степен и се разработва план от втори порядък.

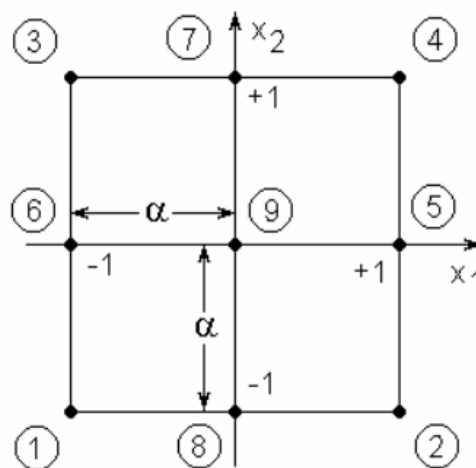
$$Y = a_0 + \sum_{i=1}^k a_i x_i + \sum_{i=1}^k a_{ii} x_i^2 + \sum_{i,u=1}^k a_{iu} x_i x_u + \dots$$

В този случай е необходимо всеки фактор да се варира на не по-малко от три нива. Броя на опитите при провеждане на пълен факторен експеримент е 3^k . така например при три фактора ($k=3$) броят на опитите е $m=27$, а при $k=5 \rightarrow m=243$. Във връзка с големия брой опити, необходим за реализирането на пълен факторен експеримент за планове от втори порядък, прилагането на пълен факторен експеримент е нецелесъобразно.

Намаляване на броя на опитите е възможно, използвайки така наречените композиционни планове, разработени от Бокс и Уилсън. При два фактора уравнението на регресия има вида:

$$Y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{12} x_1 x_2$$

и броя на опитите е 9 – фиг.54.



фиг.54

При k фактора общия брой опити в матрицата на композиционния план ще бъде:

$$m = 2^k + 2k + m_0 \quad \text{при } k < 5$$

$$m = 2^{k-1} + 2k + m_0 \quad \text{при } k > 5.$$

където m_0 е броя на опитите в центъра на плана (точка 11).

Композиционен план за $k=2$ и $m_0=1$ е показан в табл.11

табл.11

№ на опита	x ₀	x ₁	x ₂	x ₁ x ₂	x ₁ ²	x ₂ ²	Резултат y _i
1	+1	-1	-1	+1	+1	+1	y ₁
2	+1	+1	-1	-1	+1	+1	y ₂
3	+1	-1	+1	-1	+1	+1	y ₃
4	+1	+1	+1	+1	+1	+1	y ₄
5	+1	+α	0	0	α ²	0	y ₅
6	+1	-α	0	0	α ²	0	y ₆
7	+1	0	+α	0	0	α ²	y ₇
8	+1	0	-α	0	0	α ²	y ₈
9	+1	0	0	0	0	0	y ₉

Този план не е ортогонален тъй като сумата от произведенията на елементите в кои да са два стълба от матрицата не е равно на нула:

$$\sum_{j=1}^m x_{0j}x_{ij} \neq 0; \quad \sum_{j=1}^m x_{ij}^2 x_{uj}^2 \neq 0$$

което създава значителни трудности при определяне на коефициентите в уравнението на регресия. Планът може да бъде приведен в ортогонален чрез въвеждане на нови променливи (преобразуване на квадратичните ефекти) и чрез подходящо избиране на величината α. Въвеждат се нови променливи x_{ij}'.

$$x'_{ij} = x_{ij}^2 - \frac{\sum_{j=1}^m x_{ij}^2}{m} = x_{ij}^2 - \bar{x}_i^2$$

Тогава уравнението на регресия ще добие вида:

$$Y = a'_0 + \sum_{i=1}^k a_i x_i + \sum_{i,u=1}^k a_{iu} x_i x_u + \sum_{i=1}^k a'_{ii} x_i'$$

α се избира от табл.12 в зависимост от броя на факторите k и броя на опитите в центъра на плана m₀.

табл.12

m ₀	k=2	k=3	k=4	k=5
1	1,000	1,215	1,414	1,546
2	1,077	1,285	1,471	1,606
3	1,148	1,353	1,546	1,664
4	1,214	1,414	1,606	1,718
5	1,267	1,471	1,664	1,772
6	1,320	1,525	1,718	1,819
7	1,369	1,575	1,772	1,868
8	1,414	1,623	1,819	1,913
9	1,454	1,668	1,868	1,957
10	1,498	1,711	1,913	2,000

Ортогонален план от втори порядък при k=2 и m₀=1 е показан в табл.13

табл.13

№ на опита	x ₀	x ₁	x ₂	x ₁ x ₂	x ₁ '	x ₂ '	Резултат y _i
1	+1	-1	-1	+1	+1/3	+1/3	y ₁
2	+1	+1	-1	-1	+1/3	+1/3	y ₂
3	+1	-1	+1	-1	+1/3	+1/3	y ₃
4	+1	+1	+1	+1	+1/3	+1/3	y ₄
5	+1	α= +1	0	0	+1/3	-2/3	y ₅
6	+1	α= -1	0	0	+1/3	-2/3	y ₆
7	+1	0	α= +1	0	-2/3	+1/3	y ₇
8	+1	0	α= -1	0	-2/3	+1/3	y ₈
9	+1	0	0	0	-2/3	-2/3	y ₉

В тази таблица $x'_{ij} = x_{ij}^2 - \frac{\sum_{j=1}^9 x_{ij}^2}{9} = x_{ij}^2 - \frac{2}{3}$

Коефициентите в уравнението на регресия се определят от зависимостите:

$$a_i = \frac{\sum_{j=1}^m x_{ij} y_{ij}}{\sum_{j=1}^m x_{ij}^2}$$

$$a'_{ii} = \frac{\sum_{j=1}^m x'_{ij} y_j}{\sum_{j=1}^m x'^2_{ij}}$$

$$a_{iu} = \frac{\sum_{j=1}^m (x_{ij} x_{uj}) y_j}{\sum_{j=1}^m (x_{ij} x_{iu})^2}$$

където i е номера на колоната в матрицата на планиране, а j е номера на реда в матрицата на планиране.

Следва да се отбележи, че коефициентите в уравнението на регресия, получени от този план са определени с различна точност. Дисперсиите на коефициентите са съответно:

$$S_{ai}^2 = \frac{S_{\text{взгп}}^2}{\sum_{j=1}^m x_{ij}^2}; \quad S_{a'_{ii}}^2 = \frac{S_{\text{взгп}}^2}{\sum_{j=1}^m x'^2_{ij}}; \quad S_{a_{iu}}^2 = \frac{S_{\text{взгп}}^2}{\sum_{j=1}^m (x_{ij} x_{uj})^2}$$

Уравнението на регресия след преобразуването на колоните с квадратични ефекти се получава във вида:

$$Y = a'_0 + \sum_{i=1}^k a_i x_i + \sum_{i,u=1}^k a_{iu} x_i x_u + \sum_{i=1}^k a'_{ii} (x_i^2 - \bar{x}_i^2)$$

За обратно преобразуване в обичайната форма следва да се премине от коефициенти a'_0 към коефициенти a_0 :

$$a_0 = a'_0 - \sum a'_{ii} \bar{x}_i^2$$

Дисперсията на коефициента a_0 се определя от зависимостта:

$$S_{a_0}^2 = S_{a_0}^2 + \sum x_i^2 S_{a_{ii}}^2$$

За намиране на дисперсията на възпроизводимост $S_{\text{възпр}}$ се правят няколко опита m_0 в центъра на плана.

$$S_{\text{възпр}}^2 = \frac{1}{m_0 - 1} \sum_{i=1}^{m_0} (y_{0i} - \bar{y}_0)^2 = \frac{1}{m_0 - 1} \left[\sum_{i=1}^{m_0} y_{0i}^2 - \frac{1}{m_0} \left(\sum_{i=1}^{m_0} y_{0i} \right)^2 \right]$$

Знаейки дисперсията на възпроизводимост, се прави проверка за значимост на коефициентите на уравнението на регресия и адекватност на това уравнение.

Значимостта на коефициентите се проверява по критерия на Студент $t_i = |a_i|/S_{a_i}$. Коефициентът е значим ако $t_i > t_{\alpha, m_1}$, т.е. ако $|a_i| > t_{\alpha, m_1} \cdot S_{a_i}$, където m_1 е броя на степените на свобода на дисперсията на възпроизводимост.

Адекватността на уравнението на регресия се проверява по критерия на Фишер, като за целта се определя дисперсията за адекватност:

$$S_{\text{адекв}}^2 = \frac{n}{m - l} \sum_{j=1}^m (y_i - Y_i)^2$$

където l е броя на коефициентите в уравнението на регресия

$$F = \frac{S_{\text{адекв}}^2}{S_{\text{възпр}}^2}$$

Ако $F < F_{\alpha, m_1, m_2}$ за съответните степени на свобода на дисперсията на адекватност $m_1 = m - l$, и степени на свобода на дисперсията на възпроизводимост $m_2 = m_0 - 1$, и при зададено ниво на значимост α , то моделът се счита за адекватен.

Пример: Изследване на причините за възникване на дефекти в горещовалцовани стоманени листове. Известно е, че голяма част от дефектите се дължат на заготовката. Съществува достатъчно тясна връзка между някои от параметрите на отлятата стомана и дефектите във валцованите листове. Дефектността се изразява в относителни единици $y, \%$ (площ на дефектите към обща площ). Прието е, че най-съществено влияят два фактора: скорост на изгаряне на въглерода в периода на кипене на рудата $X_1, \%/ч$, и времето за отливане на стоманата X_2 , мин. Нивата на вариране на факторите са дадени в таблицата:

Нива на факторите	Фактори	
	$X_1, \%/ч$	$X_2, \text{мин.}$
Основно (0)	0,35	5,5
Долно (-1)	0,20	3,5
Горно (+1)	0,50	7,5
Интервал на вариране	0,15	2,0

Кодирането на нивата на факторите с извършено по зависимостта: $x_{ij} = \frac{(X_{ij} - \bar{X}_j)}{\Delta X_j}$

За провеждане на експеримента се използва план от втори порядък с три опита в центъра на плана. От табл.10 при брой на факторите $k=2$ и $m_0=3$ се определя $\alpha=1,148 \approx 1,15$. Матрицата на планиране е дадена в долната таблица

№ на опита	Фактории (кодирани стойности)		Фактории (натурални стойности)		Резултат
	x_1	x_2	$X_1, \%/ч$	$X_2, \text{мин}$	
1	-1	-1	0,20	3,5	0,36
2	+1	-1	0,50	3,5	0,51
3	-1	+1	0,20	7,5	1,33
4	+1	+1	0,50	7,5	1,51
5	$\alpha = +1.15$	0	0,52	5,5	0,50
6	$\alpha = -1.15$	0	0,18	5,5	0,31
7	0	$\alpha = +1.15$	0,35	7,8	1,59
8	0	$\alpha = -1.15$	0,35	3,2	0,45
9	0	0	0,35	5,5	0,30
10	0	0	0,35	5,5	0,29
11	0	0	0,35	5,5	0,31

Натуралните стойности X_1 и X_2 при код $\alpha = +1.15$ и $\alpha = -1.15$ се определят от зависимостта за кодиране:

$$x_{ij} = \frac{(X_{ij} - \bar{X}_j)}{\Delta X_j};$$

$$+1,15 = \frac{X_{15} - 0,35}{0,15}, \text{ от където } X_{15} = 1,15 \cdot 0,15 + 0,35 = 0,52$$

Аналогично: $X_{16}=0,18$; $X_{27}=7,8$; $X_{28}=3,2$

Към матрицата на планиране добавяме фиктивна колона $x_0=+1$, необходима за определяне на свободния член a_0 в уравнението на регресия, допълнителна колона $x_{12}=x_1x_2$ и колони x_1^2 и x_2^2 , които преобразуваме в x_1' и x_2' .

№ на опита	Фактори						Резултат	
	x_0	x_1	x_2	$x_{12}=x_1x_2$	x_1'	x_2'	y_j	Y_j
1	+1	-1	-1	+1	+0,4	+0,4	0,36	0,366
2	+1	+1	-1	-1	+0,4	+0,4	0,51	0,526
3	+1	-1	+1	-1	+0,4	+0,4	1,33	1,346
4	+1	+1	+1	+1	+0,4	+0,4	1,51	1,506
5	+1	+1,15	0	0	+0,7225	-0,6	0,50	0,507
6	+1	-1,15	0	0	+0,7225	-0,6	0,31	0,323
7	+1	0	+1,15	0	-0,6	+0,7225	1,59	1,587
8	+1	0	-1,15	0	-0,6	+0,7225	0,45	0,460
9	+1	0	0	0	-0,6	-0,6	0,30	0,296
10	+1	0	0	0	-0,6	-0,6	0,29	0,296
11	+1	0	0	0	-0,6	-0,6	0,31	0,296

$$x_{ij}' = x_{ij}^2 - \frac{\sum_{j=1}^{11} x_{ij}^2}{11}$$

$$x_{11}' = x_{11}^2 - \frac{\sum_{j=1}^{11} x_{1j}^2}{11} = (-1)^2 - \frac{(-1)^2 + (+1)^2 + (-1)^2 + (+1)^2 + (1,15)^2 + (-1,15)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2}{11} = 0,4$$

Аналогично се определят и останалите стойности x_{ij}' .

В горната таблица освен получените от експеримента стойности y_j са нанесени и стойностите Y_j , получени по намерения математичен модел (уравнението на регресия).

Уравнението на регресия има вида:

$$Y = a_0' + a_1x_1 + a_2x_2 + a_{12}x_1x_2 + a_{11}'x_{11}' + a_{22}'x_{22}'$$

За намиране на коефициентите в уравнението на регресия се съставят две допълнителни таблици, в които са представени междинни резултати, необходими за изчисления по формулите:

$$a_i = \frac{\sum_{j=1}^m x_{ij} y_j}{\sum_{j=1}^m x_{ij}^2}; a_{ii}' = \frac{\sum_{j=1}^m x_{ij}' y_j}{\sum_{j=1}^m x_{ij}'^2}; a_{iu} = \frac{\sum_{j=1}^m (x_{ij} x_{iu}) y_j}{\sum_{j=1}^m (x_{ij} x_{iu})^2}$$

№ на опита	x_0y	x_1y	x_2y	$x_{12}y$	$x_1'y$	$x_2'y$
1	0,36	-0,36	-0,36	0,36	0,144	0,144
2	0,51	0,51	-0,51	-0,51	0,204	0,204
3	1,33	-1,33	1,33	-1,33	0,532	0,532
4	1,51	1,51	1,51	1,51	0,604	0,604
5	0,5	0,575	0	0	0,36125	-0,3
6	0,31	-0,3565	0	0	0,223975	-0,186
7	1,59	0	1,8285	0	-0,954	1,148775
8	0,45	0	-0,5175	0	-0,27	0,325125
9	0,3	0	0	0	-0,18	-0,18
10	0,29	0	0	0	-0,174	-0,174
11	0,31	0	0	0	-0,186	-0,186
$\sum x_{ij} y_{ij}$	7,46	0,5485	3,281	0,03	0,305225	1,9319

№ на опита	$(x_0)^2$	$(x_1)^2$	$(x_2)^2$	$(x_{12})^2$	$(x_1')^2$	$(x_2')^2$
1	1	1	1	1	0,16	0,16
2	1	1	1	1	0,16	0,16
3	1	1	1	1	0,16	0,16
4	1	1	1	1	0,16	0,16
5	1	1,3225	0	0	0,522006	0,36
6	1	1,3225	0	0	0,522006	0,36
7	1	0	1,3225	0	0,36	0,522006
8	1	0	1,3225	0	0,36	0,522006
9	1	0	0	0	0,36	0,36
10	1	0	0	0	0,36	0,36
11	1	0	0	0	0,36	0,36
$\sum x_{ij}^2$	11	6,645	6,645	4	3,484013	3,484013

$$a_0' = 7,46/11 = 0,678182$$

$$a_1 = 0,5485/6,645 = 0,082543$$

$$a_2 = 3,281/6,645 = 0,493755$$

$$a_{12} = 0,03/4 = 0,0075$$

$$a_{11}' = 0,305225/3,484013 = 0,087607$$

$$a_{22}' = 1,9319/3,484013 = 0,554504$$

Прави се проверка за значимост на коефициентите по критерия на Стюdent $t_i = |a_i|/S_{ai}$

$$S_{ai}^2 = \frac{S_{\text{възпр}}^2}{\sum_{j=1}^m x_{ij}^2}; \quad S_{aii}'^2 = \frac{S_{\text{възпр}}^2}{\sum_{j=1}^m x_{ij}'^2}; \quad S_{aii}^2 = \frac{S_{\text{възпр}}^2}{\sum_{j=1}^m (x_{ij} \cdot x_{ij}')^2}$$

За определяне на дисперсиите S_{ai}^2 се определя дисперсията на възпроизводимост от трите паралелни опита в центъра на плана ($j=9,10$ и 11).

$$S_{\text{възпр}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^3 (y_{0i} - \bar{y}_0)^2}{3-1} = \frac{1}{3-1} \left[\sum_{i=1}^3 y_{0i}^2 - \frac{1}{3} \left(\sum_{i=1}^3 y_{0i} \right)^2 \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left[(0,30^2 + 0,29^2 + 0,31^2) - \frac{1}{3} (0,30 + 0,39 + 0,31)^2 \right] = 0,0001$$

$$S_{a_0'}^2 = 0,0001/11 = 9,09091 \cdot 10^{-6};$$

$$S_{a_0'} = \sqrt{9,09091 \cdot 10^{-6}} = 0,003015$$

$$S_{a_1}^2 = S_{a_2}^2 = 0,0001/6,645 = 1,5 \cdot 10^{-5};$$

$$S_{a_1} = S_{a_2} = 0,003879$$

$$S_{a_{12}}^2 = 0,0001/4 = 2,5 \cdot 10^{-5};$$

$$S_{a_{12}} = 0,005$$

$$S_{a_{11}'}^2 = S_{a_{22}'}^2 = 0,0001/3,484013 = 2,87 \cdot 10^{-5};$$

$$S_{a_{11}'} = S_{a_{22}'} = 0,005357$$

Тогава критерия на Стюdent за всеки от коефициентите ще бъде:

$$t_{a_0} = |a_0'|/S_{a_0'} = 0,678182/0,003015 = 224,9$$

$$t_{a_1} = 0,082543/0,003879 = 21,2$$

$$t_{a_2} = 0,493755/0,003879 = 127,3$$

$$t_{a_{12}} = 0,0075/0,005 = 1,5$$

$$t_{a_{11}'} = 0,087607/0,005357 = 16,3$$

$$t_{a_{22}'} = 0,554504/0,005357 = 103,5$$

Тъй като $t_{0,05;3-1} = 4,3$ ($TINV(0,05;2) = 4,302656$) то само коефициента a_{12} не е значим. Тогава уравнението на регресия може да се запише във вида:

$$Y = 0,68 + 0,08 \cdot x_1 + 0,49 \cdot x_2 + 0,09 \cdot x_1' + 0,55 \cdot x_2'$$

Стойностите на Y_j , получени по това уравнение са нанесени в таблицата на плана на експеримента. Съпоставяйки получените стойности Y_j по уравнението на регресия с опитните данни y_j , се определя дисперсията за адекватност, отчитайки, че броя на значимите коефициенти в уравнението на регресия е равен на пет:

$$S_{\text{адекв}}^2 = \frac{\sum_{j=1}^{11} (y_j - Y_j)^2}{11-5} =$$

$$= \frac{1}{6} [(0,36 - 0,366)^2 + (0,51 - 0,526)^2 + (1,33 - 1,346)^2 + \dots + (0,31 - 0,296)^2] = 0,00019$$

Адекватността на уравнението на регресия се проверява по критерия на Фишер.

$$F = \frac{S_{\text{адекв}}^2}{S_{\text{възпр}}^2} = \frac{0,00019}{0,0001} = 1,9$$

$F_{\alpha, m_1=6; m_2=2} = 19,3$ ($\text{FINV}(0,05; 6; 2) = 19,32949$), където $m_1 = 11 - 5 = 6$; $m_2 = 3 - 1 = 2$.

Тъй като $F < F_{\alpha, m_1=6; m_2=2}$ то уравнението на регресия може да се счита за адекватно.

Отчитайки, че стойностите на x'_1 и x'_2 са:

$$x'_1 = x_1^2 - \frac{\sum_{j=1}^{11} x_{1j}^2}{11} = x_1^2 - 0,6; \quad x'_2 = x_2^2 - \frac{\sum_{j=1}^{11} x_{1j}^2}{11} = x_2^2 - 0,6$$

то окончателно уравнението на регресия може да се запише във вида:

$$Y = 0,68 + 0,08 \cdot x_1 + 0,49 \cdot x_2 + 0,09 \cdot (x_1^2 - 0,6) + 0,55 \cdot (x_2^2 - 0,6) =$$

$$= (0,68 - 0,09 \cdot 0,6 - 0,55 \cdot 0,6) + 0,08 \cdot x_1 + 0,49 \cdot x_2 + 0,09 \cdot x_1^2 + 0,55 \cdot x_2^2 =$$

$$= 0,29 + 0,08 \cdot x_1 + 0,49 \cdot x_2 + 0,09 \cdot x_1^2 + 0,55 \cdot x_2^2$$

Ако се анализира полученото уравнение за екстремум спрямо x_1 и x_2 :

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = 0,08 + 2 \cdot 0,09 \cdot x_1 = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = 0,49 + 2 \cdot 0,55 \cdot x_2 = 0$$

Решавайки тези съотношения, се намира, че екстремум ще има в точката с координати $x_1 = -0,08 / (2 \cdot 0,09) = -0,44$ и $x_2 = -0,55 / (2 \cdot 0,49) = -0,44$. Натуралните стойности на факторите X_1 и X_2 могат да бъдат намерени от зависимостите, използвани за кодирането:

$$\frac{X_1 - 0,35}{0,15} = x_1 = -0,44; \quad X_1 = 0,35 - 0,44 \cdot 0,15 = 0,28 \text{ \% / ч}$$

$$\frac{X_2 - 5,5}{2} = x_2 = -0,44; \quad X_2 = 5,5 - 0,44 \cdot 2 = 4,6 \text{ мин.}$$

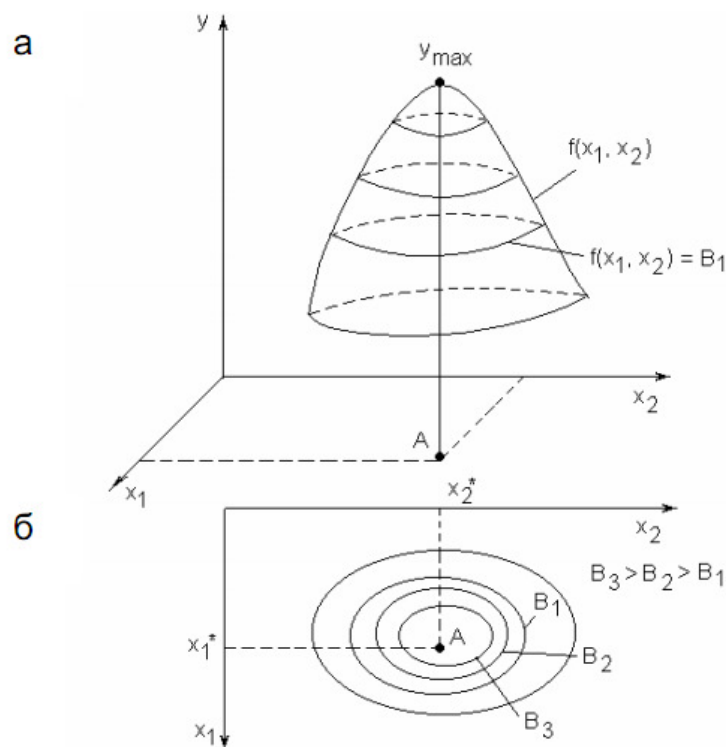
При стойности на факторите $X_1 = 0,28 \text{ \% / ч}$ и $X_2 = 4,6 \text{ мин}$ дефектността ще бъде минимална и ще бъде от порядъка на 0,16%:

$$Y = 0,29 + 0,08 \cdot (-0,44) + 0,49 \cdot (-0,44) + 0,09 \cdot (-0,44)^2 + 0,55 \cdot (-0,44)^2 = 0,16$$

Планиране на експеримента в търсене на оптимални условия

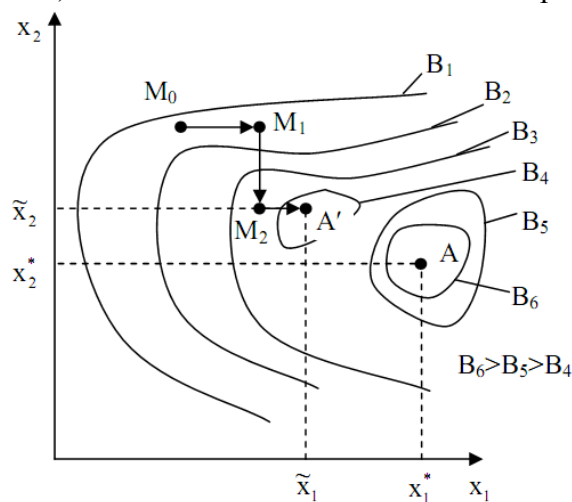
В много случаи от инженерната практика е необходимо да се намерят такива числени стойности на влияещите фактори, при които изходният параметър достига екстремни стойности (максимум или минимум). Графическа интерпретация на такава задача при два фактора x_1 и x_2 е дадена на фиг.55. Точката А съответства на оптималните стойности на факторите x_1^* и x_2^* , при които се осигурява y_{max} .

Методите за търсене на оптимални условия се отнасят към итерационните методи, при което процесът на оптимизация се разбива на стъпки, като на всяка стъпка се извършват поредица опити, на базата на които се определя по какъв начин да се изменят стойностите на влияещите фактори, че да се получи подобрение на резултата y . При това на всяка стъпка се получава информация, която се използва за избора на следващата стъпка. Съществуват редица методи за постъпкова оптимизация, но тук ще бъдат разгледани само някои от тях.

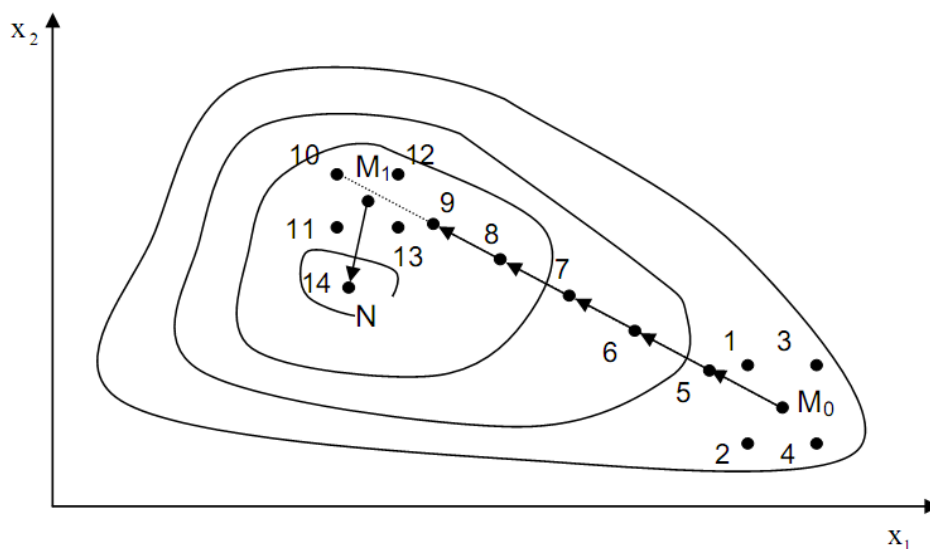


фиг.55

При метода за *покоординатна оптимизация* (представен за двумерен случай на фиг.56) търсенето на оптимум се осъществява с последователно вариране на всеки от факторите. Първо се променят стойностите само на един фактор x_1 (останалите остават неизменни), до тогава докато не пресане нарастването на реакцията y (т M_1). След това се променят стойностите на втория фактор x_2 (останалите остават неизменни) и така процедурата се повтаря. Този метод е много прост, но при повече влияещи фактори изисква значителен брой опити. Освен това при някои зависимости $y=f(x_1, \dots, x_k)$ този метод може да доведе до неправилен резултат.



фиг. 56



фиг.57

Метод на градацията (градиентен метод) – при този метод стъпковото движение се осъществява в направление на най бързото нарастване на функцията y , т.е. по направление на градиента $\text{grad } y(x_1, x_2)$, като направлението се коригира не след всяка стъпка, а при достигане на локален екстремум на функцията (фиг.57).

Нека точка M_0 е център на план 2^2 (пълнен факторен експеримент), а координатите на отделните опити съответстват на точките 1, 2, 3 и 4. По резултата от така проведения експеримент могат да се определят коефициентите на линейното уравнение на регресия $Y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2$. Градиента на функцията в тази точка се определя като:

$$\text{grad } y = \frac{\partial Y}{\partial x_1} \cdot \vec{i} + \frac{\partial Y}{\partial x_2} \cdot \vec{j},$$

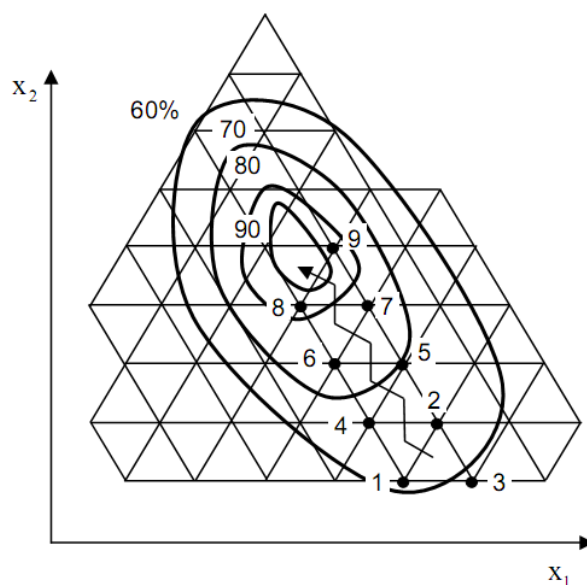
където $\vec{i}$ и $\vec{j}$ са единични вектори в направление на координатните оси.

Следователно, за движение по градиента е необходимо да се изменят факторите пропорционално на техните коефициенти на регресия и в страна, съответстваща на знака на коефициента. При достигане на локален екстремум (т. M_1) се извършва нов пълен факторен експеримент с план 2^2 за намиране на ново направление на градиента и процедурата се повтаря.

Симплекс метод – при този метод се използва специален план на експеримента във вид на симплекс. Симплекс – това е изпъкнал многоъгълник, който в k -мерно пространство има $k+1$ върха. Например в двуфакторно пространство ($k=2$) симплекс е триъгълник, в трифакторно пространство ($k=3$) – симплекс е тетраедер и т.н. Координатите на върховете на симплекса са стойностите на факторите в отделните опити.

След построяване на изходния симплекс и провеждане на опити при стойности на факторите, съответстващи на координатите на неговите върхове, се анализират резултатите и се избира върха на симплекса, в който е получена най-малката (най-лошата) стойност на реакцията y . За придвижване към оптимума е необходимо да се проведе опит в нова точка, явяваща се огледален образ на точката с най-лош резултат.

На фиг.58 е показано геометрично изображение на симплекс метода при два фактора x_1 и x_2 ($k=2$). При провеждане на опити 1, 2 и 3 най-лош резултат дава опит 3. Следващият опит се извършва в точка 4, която образува с точки 1 и 2 нов симплекс. След сравняване на резултатите от опити 1, 2 и 4, най-лош резултат е получен в т.1, поради което тази точка в новия симплекс се заменя с огледалното изображение – т.5 и т.н. докато не се достигне почти стационарна област. Следва да се отбележи, че само в началото се правят $k+1$ опити, а след това на всяка стъпка се провежда само по още един опит, условията за който се избират на базата на предишните резултати.



фиг.58

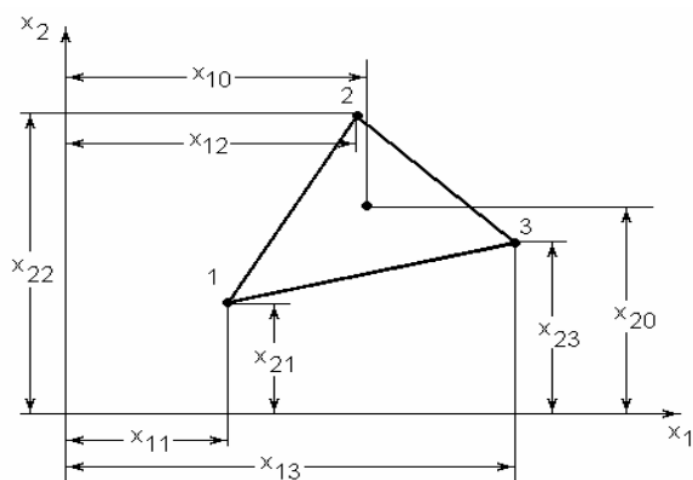
За построяване на началния симплекс, координатите за всеки опит може да се определят по формулата:

$$x_{ij} = x_{i0} + C_{ij} \Delta x_i;$$

където x_{i0} – координатите на центъра на началния симплекс; Δx_i – интервалът на вариране на i – тия фактор; C_{ij} – коефициент, който може да се избере от табл.14.

Табл.14

Номер на опита j	Коефициенти C_{ij}		
	Фактори i		
	x_1	x_2	x_3
1	k_1	k_2	k_3
2	$-R_1$		
3	0	$-R_2$	
4	0	0	$-R_3$
$k_i = \sqrt{\frac{1}{2i(i+1)}}$		$R_i = \sqrt{\frac{i}{2(i+1)}}; \quad i=1,2,\dots,k$	



фиг. 59

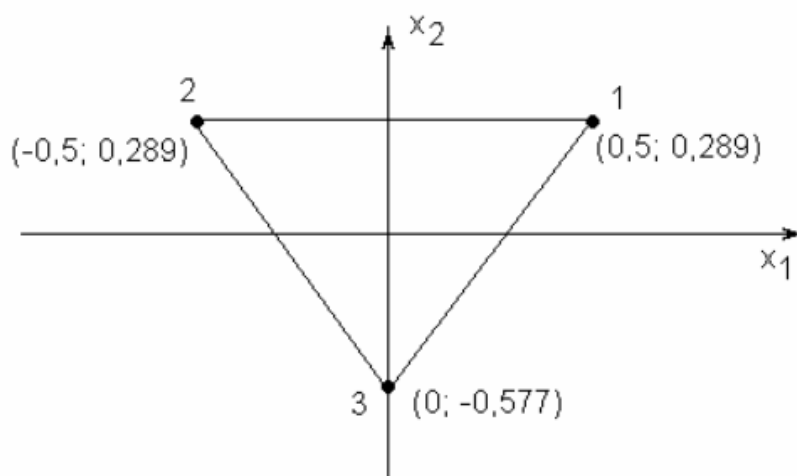
Например, ако е необходимо да се състави симплекс план за два фактора, то в началото се правят три опита със следните координати (фиг.59):

1-ви опит $\rightarrow x_{11}=x_{10}+k_1\Delta x_1$; $x_{21}=x_{20}+k_2\Delta x_2$

2-ри опит $\rightarrow x_{12}=x_{10}-R_1\Delta x_1$; $x_{22}=x_{20}+k_2\Delta x_2$

3-ти опит $\rightarrow x_{13}=x_{10}+0$; $x_{23}=x_{20}-R_2\Delta x_2$

Ако $x_{10}=0$ и $x_{20}=0$, а $\Delta x_1=\Delta x_2=1$, то координатите на опитите (фиг.60) ще бъдат: опит 1 (0,5;0,289), опит 2 (-0,5;0,289) и опит 3 (0;-0,577).



фиг.60

За определяне на условията за провеждане на опита в огледалната точка (координатите на новия връх на симплекса) се използва формулата:

$$x_{in} = 2\left(\frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k+1} x_{ij}\right) - x_{i3}; \quad j \neq i_3$$

където x_{in} – координатите на новата точка (новият връх) на симплекса; x_{i3} – координатите на заменената точка (координатите на върха на симплекса с най-лош резултат); $\frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k+1} x_{ij}$ – средната стойност от координатите на всички върхове на симплекса освен заменения.

Критерии за приключване на процеса на търсене на оптимум могат да бъдат:

- Разликите в стойностите на реакцията y във върховете на симплекса са станали по-малки от предварително зададена стойност. Това означава или влизане в “почти стационарна” област близо до оптимума, или достигане на участък във вид на “плато”.
- Циклично движение на симплекса около един от неговите върхове в подължение на няколко стъпки. Може да се очаква, че търсения оптимум е разположен вътре в областта, обхваната от циркулацията на симплекса. В този случай се препоръчва да се намалят размерите на симплекса, т.е. разстоянието между върховете, и да продължи търсенето до уточняване на координатите на търсения оптимум.

Пример: Нека обекта да има свойства, описвани с уравнението $y=4+12x_1-x_1^2+30x_2-3x_2^2$

Да се намери екстремум на функцията, използвайки симплекс-метод. Избират се основните нива на факторите x_1 и x_2 . Предполага се, че екстремума се намира близо до стойностите $x_{10}=3$ и $x_{20}=-1$, които се приемат за основни нива. Интервалът на вариране се приема да бъде $\Delta x_1=1$ и $\Delta x_2=-1,5$.

$$k_1 = \sqrt{\frac{1}{2i(i+1)}} = \sqrt{\frac{1}{2 \cdot 1 \cdot (1+1)}} = 0,5 \quad k_2 = \sqrt{\frac{1}{2i(i+1)}} = \sqrt{\frac{1}{2 \cdot 2 \cdot (2+1)}} = 0,289$$

$$R_1 = \sqrt{\frac{i}{2(i+1)}} = \sqrt{\frac{1}{2 \cdot (2+1)}} = 0,5$$

$$R_2 = \sqrt{\frac{i}{2(i+1)}} = \sqrt{\frac{2}{2 \cdot (2+1)}} = 0,577$$

Намират се координатите на първите три опита:

Връх 1: $x_{11}=x_{10}+k_1\Delta x_1=3+0,5 \cdot 1=3,5$; $x_{21}=x_{20}+k_2\Delta x_2=-1+0,289 \cdot 1,5=-0,565$

Връх 2: $x_{12}=x_{10}-R_1\Delta x_1=3-0,5 \cdot 1=2,5$; $x_{22}=x_{20}+k_2\Delta x_2=-1+0,289 \cdot 1,5=-0,565$

Връх 3: $x_{13}=x_{10}+0=3+0=3$;

$$x_{23}=x_{20}-R_2\Delta x_2=-1-0,577\cdot 1,5=-1,865$$

Замествайки намерените координати в уравнението се получават следните резултати $y_1=15,84$; $y_2=9,78$; $y_3=-35,5$. Най-лошият резултат е $y_3=-35,5$. Следователно условията на опит 3 трябва да се заменят. Геометричната траектория на движение е показана на фиг.27.

Изчисляват се координатите на връх 4

$$x_{14}=2\left(\frac{1}{k}\sum x_{ij}\right)-x_{i3}=2\left[\frac{1}{2}(x_{11}+x_{12})\right]-x_{13}=2\left[\frac{1}{2}(3,5+2,5)\right]-3=3;$$

$$x_{24}=2\left[\frac{1}{2}(-0,565-0,565)\right]-(-1,865)=0,735$$

Резултат: $y_4=52,1$

Сравнявайки резултатите $y_1=15,84$; $y_2=9,78$; и $y_4=52,1$ най-лош резултат е y_2 . Изчисляват се координатите на връх 5

$$x_{15}=4; \quad x_{25}=0,735; \quad y_5=57,1$$

Сравнявайки резултатите $y_1=15,84$; $y_4=52,1$; и $y_5=57,1$ заменя се връх 1 и се изчисляват координатите на връх 6.

$$x_{16}=3,5; \quad x_{26}=2,035; \quad y_6=82,6$$

По нататък се получават координати за връх 7 – (4,5;2,035), за връх 8 – (4;3,3), за връх 9 – (5;3,3), за връх 10 – (4,5;4,6), за връх 11 – (5,5;4,6) и резултатите от последните три опита са $y_9=105$; $y_{10}=113$; $y_{11}=112,32$.

Координатите на връх 12 ще бъдат:

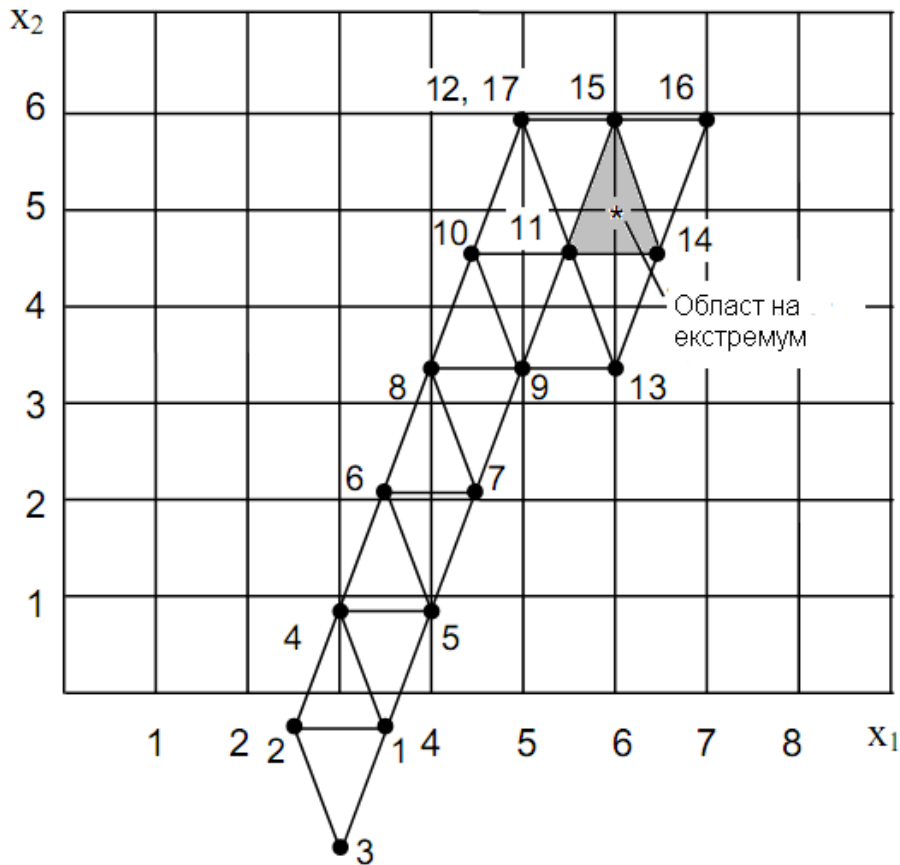
$$x_{112}=2\left[\frac{1}{2}(4,5+5,5)-5\right]=5; \quad x_{212}=2\left[\frac{1}{2}(4,6+4,6)-3,3\right]=5,9; \quad y_{12}=111$$

y_{12} дава по-лош резултат от y_{10} и y_{11} , поради което се връщаме на предишния симплекс с върхове 9, 10 и 11 и се избира по-лошият резултат, без да се обръща внимание на опит 9. Следователно трябва да се замени връх 10. Намираме се координатите на връх 13.

$$x_{113}=2\left[\frac{1}{2}(5+5,5)-4,5\right]=6; \quad x_{213}=2\left[\frac{1}{2}(3,3+4,6)-4,6\right]=3,3; \quad y_{13}=105$$

В новия симплекс 9 (5;3,3); 11 (5,5;4,6) и 13 (6;3,3) най-лош е резултата в опита 9 и се заменя върха 9.

$$x_{114}=2\left[\frac{1}{2}(5,5+6)-5\right]=6,5; \quad x_{214}=2\left[\frac{1}{2}(4,6+3,3)-3,3\right]=4,6; \quad y_{14}=114,21$$



фиг.61

Резултатите от опити 11, 13 и 14 са $y_{11}=112,32$; $y_{13}=106$ и $y_{14}=114,21$. Заменя се връх 13.

$$x_{115} = 2\left[\frac{1}{2}(5,5 + 6,5) - 6\right] = 6; \quad x_{215} = 2\left[\frac{1}{2}(4,6 + 4,6) - 3,3\right] = 5,9; \quad y_{15}=112$$

Получава се по лош резултат отколкото от опити 11 и 14. Затова се заменя връх 11.

$$x_{116} = 2\left[\frac{1}{2}(6,5 + 6) - 5,5\right] = 7; \quad x_{216} = 2\left[\frac{1}{2}(4,6 + 5,9) - 4,6\right] = 5,9; \quad y_{15}=111$$

Това също е по-лош резултат поради което в симплекса 11, 14 и 15 се заменя връх 14.

$$x_{117} = 2\left[\frac{1}{2}(5,5 + 6) - 6,5\right] = 5; \quad x_{217} = 2\left[\frac{1}{2}(4,6 + 5,9) - 4,6\right] = 5,9; \quad y_{17}=111$$

Получен е отново лош резултат. Следователно екстремумът се намира вътре в този симплекс. Ако с точност до стъпката на вариране резултатът ни устройва, то за координати на екстремум може да се приемат $x_1=6,5$ и $x_2=4,6$ при които $y=114,21$. Ако е необходимо определянето на екстремума с по-висока точност следва да се намали интервала на вариране.

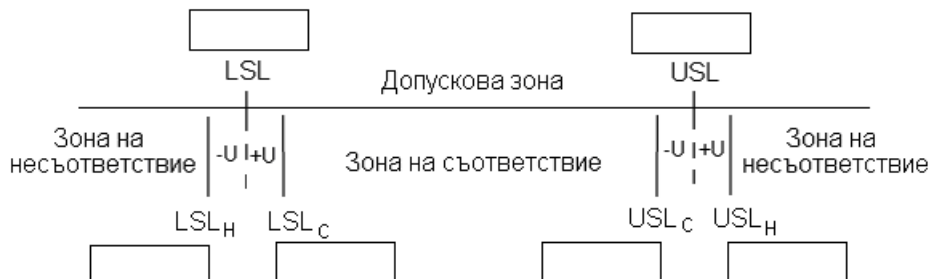
УПРАЖНЕНИЯ

КОНТРОЛ НА КАЧЕСТВОТО

Тема 1 Доказване на съответствие с изискванията

ISO/TS 14253-1; ISO 10576

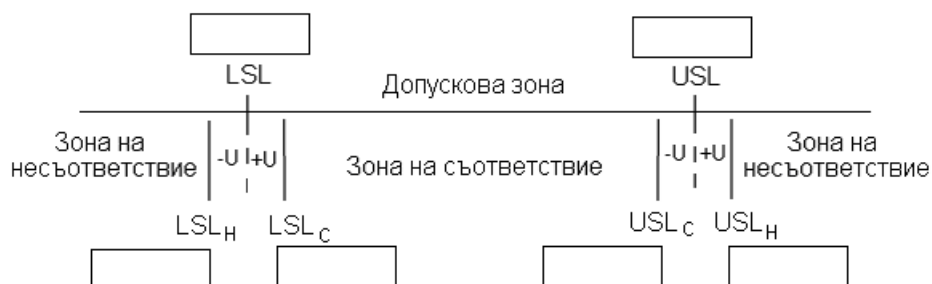
A. Контрол чрез измерване при предварително известна неопределеност на измерване



Изисквания на клиента или съгласно техническа документация						Φ20±0,05	
LSL				USL			
Разширена неопределеност на измерване ± U						0,005	k=2
Зона на съответствие				Зона на несъответствие			
LSL _c		USL _c		LSL _H		USL _H	
I етап Резултати от контрол чрез измерване				Заклучение			
Обект 1		19,985					
Обект 2		20,035					
Обект 3		20,046					
Обект 4		20,062					
Обект 5		19,965					
II етап – за обектите за които не може категорично да се докаже съответствие или несъответствие							
Резултати от повторно измерване				средно		Заклучение	
Обект 1							
Обект 2							
Обект 3		20,042					
Обект 4							
Обект 5							

Тема 1 Доказване на съответствие с изискванията

Б. Контрол чрез измерване при липса на информация за неопределеност на измерване
За оценка на точността на измерване са направени неколкократно измервания



Изисквания на клиента или съгласно техническа документация		Φ30_{-0,05}	
LSL		USL	

I етап n=3

Резултати от контрол		$\bar{X}$	s=STDEV(...)	$s_{\bar{X}} = s/\sqrt{n}$	$u = h \cdot s_{\bar{X}}$	$\pm U=k \cdot u$ при k=....
Обект 1	29,985					
	29,995					
	29,988					

Зона на съответствие				Зона на несъответствие			
LSL _C		USL _C		LSL _H		USL _H	
Заклучение							

II етап - (при необходимост) (n=3+2)

Резултати от контрол		$\bar{X}$	s=STDEV(...)	$s_{\bar{X}} = s/\sqrt{n}$	$u = h \cdot s_{\bar{X}}$	$\pm U=k \cdot u$ при k=....
Обект 1	29,990					
	29,986					

Зона на съответствие				Зона на несъответствие			
LSL _C		USL _C		LSL _H		USL _H	
Заклучение							

Коефициент на сигурност h в зависимост от n									
n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h	7	2,3	1,7	1,4	1,3	1,3	1,2	1,2	1

КОНТРОЛ НА КАЧЕСТВОТО

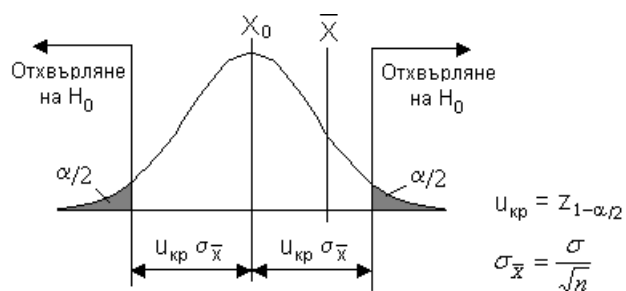
Тема 2. Проверка на хипотези

А. Прави се настройка на машина за пълнене на бутилки. Желаната (целевата стойност) е $X_0=100\text{ml}$. Средноквадратичното отклонение на процеса е известно $\sigma=10$.

След настройката е направена извадка с обем $n=30$, която е подложена на измерване, при което са получени следните резултати:

105	92	102	100	90	95	110	105	90	95
85	88	96	103	110	115	90	80	95	104
108	92	85	88	100	105	95	90	94	102

Да се провери дали е постигната желаната стойност $M_0=100$ при ниво на значимост $\alpha=0,05$.



Нулева хипотеза $\bar{X} = X_0$

Алтернативна хипотеза $\bar{X} \neq X_0$

X_0	n	σ	α
$\bar{X} = AVERAGE(x_1, x_2, \dots, x_{30})$			
$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$			
$u_{kp} = Z_{1-\alpha/2} = \text{NORMSINV}(1-\alpha/2)$			
$u_{kp} \sigma_{\bar{x}}$			
Доверителен интервал			
$X_0 - u_{kp} \sigma_{\bar{x}}$		$X_0 + u_{kp} \sigma_{\bar{x}}$	
Нулевата хипотеза	се приема	не се приема (отхвърля се)	

Заклучение:

.....

КОНТРОЛ НА КАЧЕСТВОТО

Тема 2. Проверка на хипотези

Б. Проверка на хипотезата за равенство на разликите от двойка наблюдения на предварително зададена стойност – ISO 3301

Изследва се зависи ли износването на шийките на плъзгащ лагер от типа на материала. Резултатите от проведен експеримент са дадени в табл.

№ на експеримента	Износване		Разлики $d_i = x_i - y_i$
	Материал А	Материал В	
1	3,5	1,5	
2	2	1,3	
3	4,7	4,5	
4	2,8	2,5	
5	6,5	4,5	
6	2,2	1,7	
7	2,5	1,8	
8	5,8	3,3	
9	4,2	2,3	
Сума			
Средно			

Нулева хипотеза H_0 : средната разлика е равна на d_0

n=9	$d_0=0$	Ниво на значимост $\alpha=0,01$
-----	---------	---------------------------------

$\bar{d} = \frac{1}{n} (\sum x_i - \sum y_i) = \frac{1}{n} \sum d_i$	
$\sigma_d = \sqrt{\frac{1}{n-1} \left[\sum d_i^2 - \frac{1}{n} (\sum d_i)^2 \right]} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (d_i - \bar{d})^2} = STDEV(....)$	
k=n-1	
$t_{\alpha/2;k} = TINV(\alpha/2, k)$	
$E = \left[\frac{t_{\alpha/2,k}}{\sqrt{n}} \right] \sigma_d$	
$ \bar{d} - d_0 = > (<) E =$	

Нулевата хипотеза се:	приема	отхвърля
-----------------------	--------	----------

(Нулевата хипотеза се приема ако: $|\bar{d} - d_0| < E$)

Заключение:

Вида материал: влияе не влияе на износването

При използването на материал А В износването е по-малко

КОНТРОЛ НА КАЧЕСТВОТО

Тема 2. Проверка на хипотези

В. Производител обработва еднакви детайли на две машини. Исква да провери има ли основание да обедини детайлите в обща партида, което би му позволило да избере по-изгоден план за статистически приемателен контрол (по-големия обем на партидата изисква по-малък обем на извадките).

За тази цел е направил две извадки (n=10) от детайли, произведени от двете машини. Резултатите (във вид на отклонения от номиналната стойност) са дадени в таблицата:

x _A	20	25	28	10	15	22	30	32	22	12
x _B	35	30	20	25	35	22	30	28	33	26

Проверка на хипотезата за равенство на дисперсиите на двете машини, т.е. дали двете машини дават съпоставимо разсейване на параметъра.

Издига се нулева хипотеза $s_A^2 = s_B^2$.

Обем на извадките n	10	
Ниво на значимост α	0,05	
$\bar{X}_A = \text{AVERAGE}(\dots)$		
$\bar{X}_B = \text{AVERAGE}(\dots)$		
$s_A^2 = \frac{1}{n-1} \sum (x_{Ai} - \bar{X}_A)^2 = \text{VAR}(\dots)$		
$s_B^2 = \frac{1}{n-1} \sum (x_{Bi} - \bar{X}_B)^2 = \text{VAR}(\dots)$		
$F = \frac{s_A^2}{s_B^2}$		
$F(\alpha, k_1, k_2) = \text{FINV}(\alpha, k_1, k_2)$		$k_1 = k_2 = n - 1$
$F < (>) F(\alpha, k_1, k_2)$	Хипотезата за равенство на дисперсиите	се приема не се приема

Проверка на хипотезата за равенство на разликите от двойка наблюдения на предварително зададена стойност – ISO 3301

Нулева хипотеза H_0 : средната разлика е равна на $d_0=0$

$d = x_A - x_B$									

$\bar{d} = \frac{1}{n} \sum d_i$	
$s_d = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (d_i - \bar{d})^2} = \text{STDEV}(\dots)$	
$t_{\alpha/2, k} = \text{TINV}(\alpha/2, k)$ $k = n - 1$	
$E = \left[\frac{t_{\alpha/2, k}}{\sqrt{n}} \right] s_d$	
$ \bar{d} - d_0 = \dots < (>) E = \dots$	
Хипотезата за равенство на разликите на нула	се приема не се приема

Заклучение:

.....

КОНТРОЛ НА КАЧЕСТВОТО

Тема 2.Г. Дисперсионен анализ

Облицовъчни плоскости се произвеждат на три производствени линии A_1 , A_2 , A_3 . От всяка линия в рамките на една работна смяна е направена извадка от по 5 плоскости и е измерена дебелината им. Отклоненията от номиналната стойност са дадени в таблицата. При ниво на значимост 0,05 да се установи наличието на зависимост на качеството на плоскостите от производствената линия, т.е. дали производствената линия е влияещ фактор.

Нулева хипотеза: Дисперсията, предизвикана от фактора А и остатъчната дисперсии са равни. т.е. факторът А (производствената линия) не е влияещ фактор.

№	A_1	A_2	A_3	
1	0,4	0,2	0,25	
2	0,2	0,55	0,2	
3	0,15	0,2	0,5	
4	0,15	0,32	0,35	
5	0,35	0,49	0,4	
Средна стойност (AVERAGE)	$\bar{y}_1 = \dots\dots\dots$	$\bar{y}_2 = \dots\dots\dots$	$\bar{y}_i = \dots\dots\dots$	$\bar{Y} = \dots\dots\dots$
Дисперсия s_j^2 (VAR)	$s_1^2 = \dots\dots\dots$	$s_2^2 = \dots\dots\dots$	$s_3^2 = \dots\dots\dots$	$s_R^2 = s_{cp}^2 = \dots\dots\dots$

$n=5$	$k=3$	$N=k.n=$	$\alpha=0,05$
-------	-------	----------	---------------

Дисперсия	Сума на квадратите	Степени на свобода
Обща дисперсия $s^2 = \frac{1}{N-1} \sum_1^N (y_{ij} - \bar{Y})^2$	$Q = \sum_1^N (y_{ij} - \bar{Y})^2 = s^2 v$	$v = N - 1$
Остатъчна дисперсия $s_R^2 = \frac{1}{k} \sum_1^k s_j^2 = \frac{1}{k} \sum_1^k \frac{1}{n-1} \sum_1^n (y_{ij} - \bar{y}_j)^2$	$Q_R = \sum_1^k \sum_1^n (y_{ij} - \bar{y}_j)^2 = s_R^2 v_R$	$v_R = k(n-1)$
Междугрупова дисперсия $s_A^2 = \frac{Q_A}{v_A} = n \left[\frac{1}{k-1} \sum (\bar{y}_j - \bar{Y})^2 \right]$	$Q_A = Q - Q_R$	$v_A = k - 1$

$F = \frac{s_A^2}{s_R^2} = \dots\dots\dots$	$F_T = \text{FINV}(\alpha, v_A, v_R) = \dots\dots\dots$
---	---

$F < (>) F_T$	хипотезата за равенство на дисперсиите се	приема	отхвърля
---------------	---	--------	----------

Заклучение:

КОНТРОЛ НА КАЧЕСТВОТО

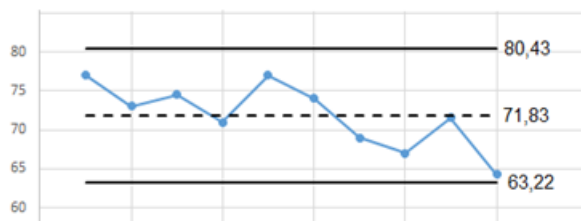
Тема 3. Оценка на възможностите на процеса

Състоянието на производствен процес се следи чрез контролни карти, като през определен период от време се правят извадки с обем $n=4$. Зададените най-голяма и най-малка гранични стойности на показателя на качеството (границите на допусковото поле) са $USL=100$ и $LSL=60$. Да се направи оценка на възможностите на процеса по резултатите от контрола на 10 извадки.

Извадка №	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄
1	74	74	82	78
2	76	76	68	72
3	64	78	80	76
4	68	72	76	68
5	68	76	84	80
6	68	72	84	72
7	64	68	72	72
8	56	72	72	68
9	64	72	72	78
10	60	68	64	65

$\bar{X} = \text{AVERAGE}(\dots)$	$s = \text{STDEV}(\dots)$	R
$\bar{\bar{X}} = \dots\dots\dots$	$\bar{s} = \dots\dots\dots$	$\bar{R} = \dots\dots\dots$

LSL		USL		Обем на извадките n	4
-----	--	-----	--	---------------------	---



$$CL = \bar{\bar{X}}$$

$$UCL = CL + A_3 \bar{s}$$

$$LCL = CL - A_3 \bar{s}$$

Да се определят индексите C_p и C_{pk} , ако за оценка на разсейването е използвано извадковото стандартно отклонение s

$\sigma = \bar{s} / c_n$	$C_p = \frac{USL - LSL}{6\sigma}$	$CPU = (USL - \bar{\bar{X}}) / 3\sigma$	$CPL = (\bar{\bar{X}} - LSL) / 3\sigma$	$C_{pk} = \min\{CPU, CPL\}$

Заклучение:.....

Да се определят индексите C_p и C_{pk} , ако за оценка на разсейването е използван размаха R

$\sigma = \bar{R} / d_n$	$C_p = \frac{USL - LSL}{6\sigma}$	$CPU = (USL - \bar{\bar{X}}) / 3\sigma$	$CPL = (\bar{\bar{X}} - LSL) / 3\sigma$	$C_{pk} = \min\{CPU, CPL\}$

Заклучение:.....

Да се определят индексите C_p и C_{pk} , ако от направено предварително изследване средноквадратичното отклонение σ на процеса е известно ($\sigma=5$)

σ	$C_p = \frac{USL - LSL}{6\sigma}$	$CPU = (USL - \bar{\bar{X}}) / 3\sigma$	$CPL = (\bar{\bar{X}} - LSL) / 3\sigma$	$C_{pk} = \min\{CPU, CPL\}$
5				

Заклучение:.....

Стойности на коефициентите:

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
c_n	0,798	0,886	0,921	0,940	0,952	0,959	0,965	0,969	0,973
d_n	1,128	1,693	2,059	2,326	2,534	2,704	2,847	2,970	3,078
A_3	2,659	1,954	1,628	1,427	1,287	1,182	1,099	1,032	0,975

КОНТРОЛ НА КАЧЕСТВОТО

Тема 4 Статистически контрол на процеси

4.1. Контролни карти на Шухарт

ISO 8258

A. Да се построи контролна карта на Шухарт, ако целева (желана) стойност не е зададена и не е известно разсейването на процеса

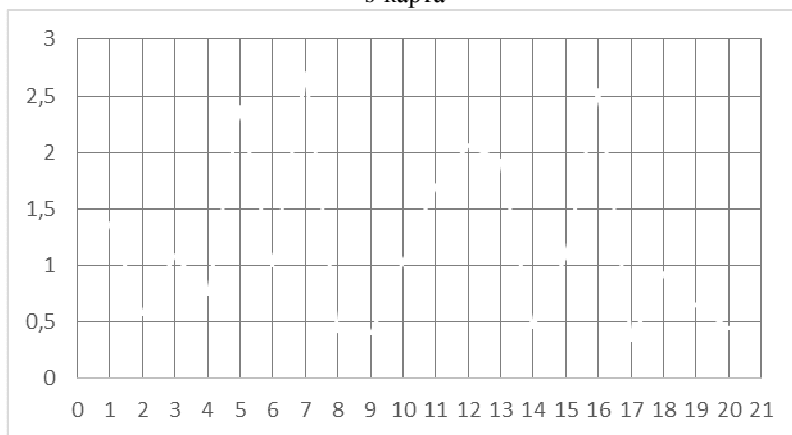
В табл. са дадени резултатите от измерване (отклонения) на 20 извадки с обем $n=4$.

Да се разработи $\bar{X} / s$ карта.

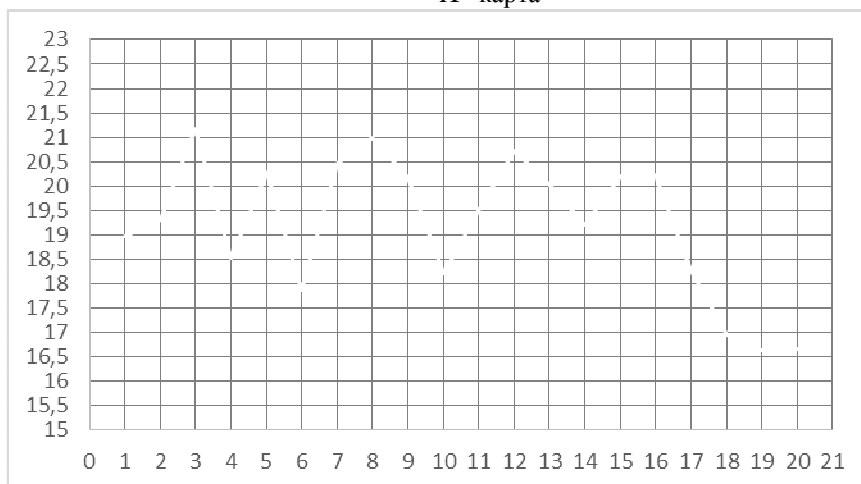
Издавка №	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄
1	19	17	20	19
2	20	19	18	19
3	22	21	20	19
4	18	18	19	18
5	17	22	20	21
6	16	18	19	17
7	20	19	21	21
8	23	18	19	22
9	20	19	21	20
10	18	17	18	19
11	21	17	20	19
12	19	20	23	20
13	17	20	22	19
14	19	18	19	20
15	19	20	21	22
16	17	19	21	23
17	18	17	18	19
18	18	16	17	18
19	17	15	17	16
20	17	16	17	18

[illegible]

s-карта



$\overline{X}$ -карта



s-карта	$\bar{s}$	$CL = \bar{s}$	$UCL = \left(1 + \frac{3}{c_n \sqrt{2n}}\right) \bar{s}$	$LCL = \left(1 - \frac{3}{c_n \sqrt{2n}}\right) \bar{s}$
$\bar{X}$ -карта	$\bar{\bar{X}}$	$CL = \bar{\bar{X}}$	$UCL = CL + \frac{3}{c_n \sqrt{n}} \bar{s}$	$LCL = CL - \frac{3}{c_n \sqrt{n}} \bar{s}$

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
c _n	0,798	0,886	0,921	0,940	0,952	0,959	0,965	0,969	0,973
d _n	1,128	1,693	2,059	2,326	2,534	2,704	2,847	2,970	3,078

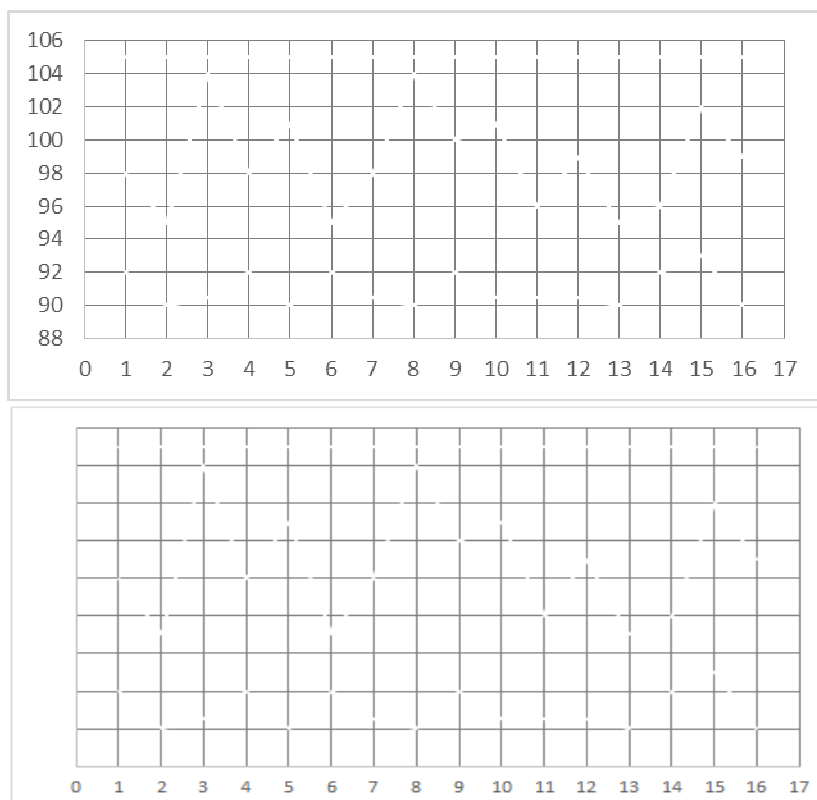
Б. Да се построи контролна карта на Шухарт ($\bar{X} / R$ карта), ако е зададена целева (желана) стойност $X_0=100$ и стандартното отклонение на процеса е известно - $\sigma=4$.

Данните от измерване на 16 извадки с обем $n=4$ след определяне на средните стойности и размаха са представени в таблицата:

Изв.№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$\bar{X}$	98	95	104	98	101	95	98	104	100	101	96	99	95	96	102	99
R	10	14	8	6	12	10	14	5	8	6	12	16	11	9	12	8

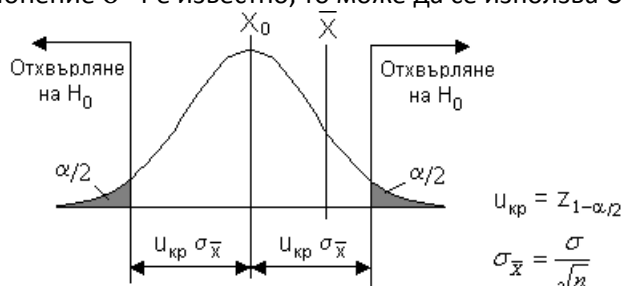
(Коефициентите се определят от табл. 2 и 3 на ISO8958)

$\bar{X}$ - карта	$CL=X_0$	$UCL = CL + \frac{3}{\sqrt{n}} \sigma$	$LCL = CL - \frac{3}{\sqrt{n}} \sigma$	n	D ₂	D ₁
R -карта	$CL=d_n\sigma$	$UCL=D_2\sigma$	$LCL= D_1\sigma$			



Заключение:

- Да се провери хипотезата за равенство на стойностите на $\bar{X}$ с желаната стойност $X_0=100$. Тъй като стандартното отклонение $\sigma=4$ е известно, то може да се използва U-критерия.



			Доверителен интервал	
α	$u_{кр}=Z_{1-\alpha/2}=NORMSINV(1-\alpha/2)$	$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$X_0 - u_{кр} \sigma_{\bar{x}}$	$X_0 + u_{кр} \sigma_{\bar{x}}$
0,0027				

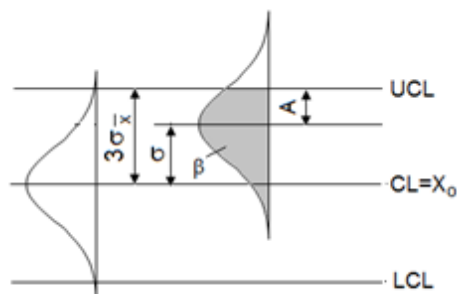
- Да се сравнят границите на доверителния интервал с контролните граници на контролната карта.

-Защо контролните граници на $\bar{X}$ -картата са на ниво $\pm 3 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$?

- За контролната карта на $\bar{X}$ да се определи рискът за допускане на грешка от първи род (погрешно да се счита че е възникнало изместване на процеса от желаната стойност X_0). Такава грешка би довела до излишно спиране и регулиране на процеса.

$$\alpha = NORMSDIST(3) = \dots\dots\dots$$

- Да се определи рискът за допускане на грешка от втори род β (пропускане на действително изместване на процеса), ако действителното ниво на процеса се е изместило от желаната стойност с $\sigma=4$ (т.е. е на ниво 104).



$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad ; \quad \sigma = \sqrt{n} \cdot \sigma_{\bar{x}}$$

$$A = 3\sigma_{\bar{x}} - \sigma = 3\sigma_{\bar{x}} - \sqrt{n} \cdot \sigma_{\bar{x}} = (3 - \sqrt{n})\sigma_{\bar{x}}$$

$$\beta = NORMSDIST(3 - \sqrt{n}) = \dots\dots\dots$$

КОНТРОЛ НА КАЧЕСТВОТО

Тема 4 Статистически контрол на процеси

4.5. Контролна карта на кумулативните суми CUSUM – карта

А. Да се построи контролна карта на кумулативните суми, ако желаната стойност е $X_0=100$ и средноквадратичното отклонение е известно - $\sigma=5$

Средноаритметичните стойности от контрола на 16 извадки с обем $n=4$ са дадени в табл.

№	$X_{\text{ср}}$	d	CUSUM
1	98		
2	106		
3	104		
4	99		
5	106		
6	97		
7	102		
8	106		
9	105		
10	98		
11	106		
12	99		
13	105		
14	104		
15	108		
16	110		

$X_0 - \sigma$	$X_0 + \sigma$

Контролни граници ($\pm 2,7\sigma$)	
LCL	UCL

Централна линия CL	0
--------------------	---

$$d_i = X_{i\text{ср}} - (X_0 + \sigma) \text{ при } X_{i\text{ср}} > (X_0 + \sigma)$$

$$d_i = X_{i\text{ср}} - (X_0 - \sigma) \text{ при } X_{i\text{ср}} < (X_0 - \sigma)$$

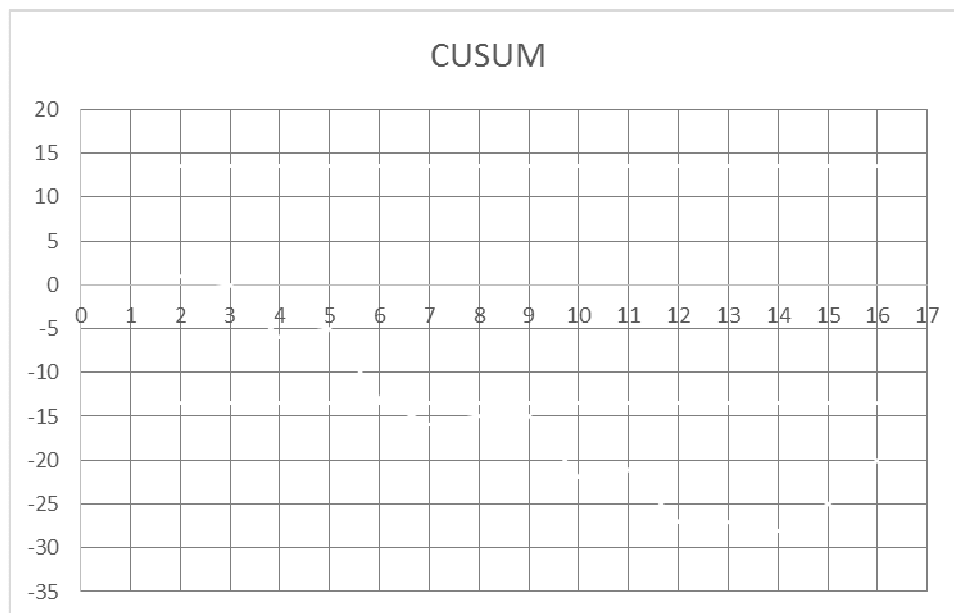
$$\text{CUSUM}_1 = d_1$$

$$\text{CUSUM}_2 = d_1 + d_2$$

$$\text{CUSUM}_3 = d_1 + d_2 + d_3$$

.....

При първата извадка за която $X_{i\text{ср}}$ стане по-голямо от $X_0 + \sigma$ или по-малко от $X_0 - \sigma$ започват да се изчисляват кумулативните суми, сумирайки разликата d_i между текущата стойност $X_{i\text{ср}}$ и $(X_0 \pm \sigma)$.



Заклучение:

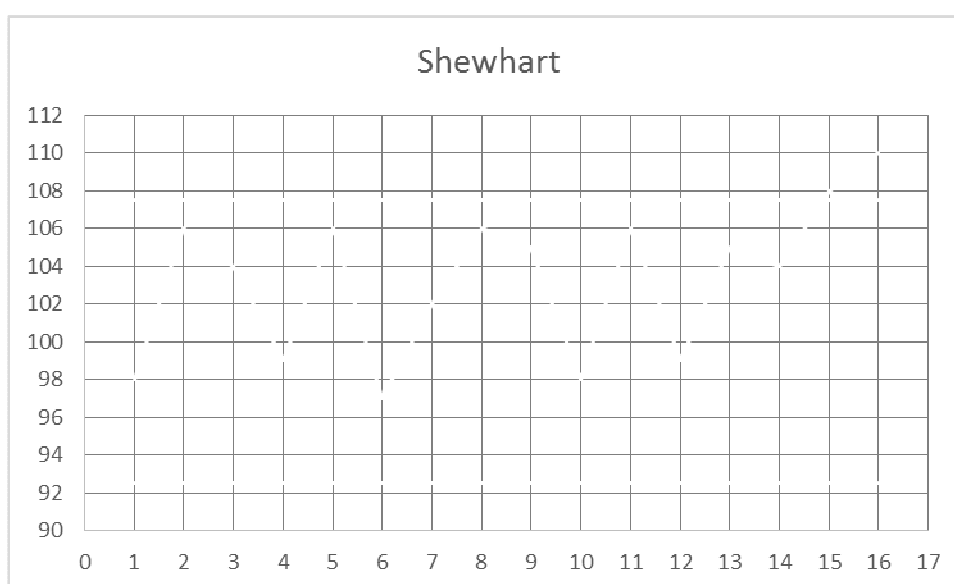
.....

Да се определи поредния номер на извадката, при която е получен сигнал за смущение в процеса.

ИЗВАДКА №	
-----------	--

Б. За същите данни да се състави контролна карта на Шухарт и да се сравнят поредните номера на извадките при които е получен сигнал за смущение в процеса.

Желана стойност X_0	σ	Обем на извадките n
Централна линия $CL=X_0$	Контролни граници	
	Горна $UCL = CL + \frac{3}{\sqrt{n}} \sigma$	Долна $UCL = CL - \frac{3}{\sqrt{n}} \sigma$



Заклучение:

.....

Да се определи поредния номер на извадката, при която е получен сигнал за смущение в процеса.

ИЗВАДКА №	
-----------	--

Да се сравни чувствителността на двата вида контролни карти към сигнали за смущения в процеса.

Какво ще бъде заключението, ако в контролната карта на Шухарт се въведат предупредителни граници на ниво $\pm 2 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$?

КОНТРОЛ НА КАЧЕСТВОТО

Тема 4 Статистически контрол на процеси

4.6. Контролни карти с предупредителни граници

ISO 7873

Да се разработи контролна карта за средноаритметичната стойност с предупредителни граници за производствен процес, поддържащ концентрацията на азот в амоняка.

Счита се, че процесът е в статистически управляемо състояние при концентрация на азот в амоняка 25%, а допустимите граници са $USL=27,5\%$; $LSL=22,5\%$.

Максималното нежелателно ниво на несъответствия е 3% ($q_1=0,03$).

От предишни изследвания е известно $\sigma=1\%$.

Прието е обема на извадката да бъде $n=5$, и контролните граници да бъдат построени така, че ARL за процеса в статистически управляемо състояние (L_0) да не е по-малко от 600, и за ниво на процеса равно на недопустимото μ_1 , средният брой извадки (L_1) – да не е повече от 12.

LSL		USL		μ_0		σ		n		q_1	
-----	--	-----	--	---------	--	----------	--	---	--	-------	--

Определяне на недопустимото ниво на процеса:

горно	$\mu_1 = USL - \sigma \cdot NORMSINV(1 - q_1)$	
долно	$\mu_{-1} = LSL + \sigma \cdot NORMSINV(1 - q_1)$	

Определяне на приведеното ниво на процеса:

$\delta = \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma}$	
$\delta \sqrt{n}$	

Възможни извадкови планове:

K	B_1	B_2	L_0	L_1

Избира се планът с минимално L_1 :

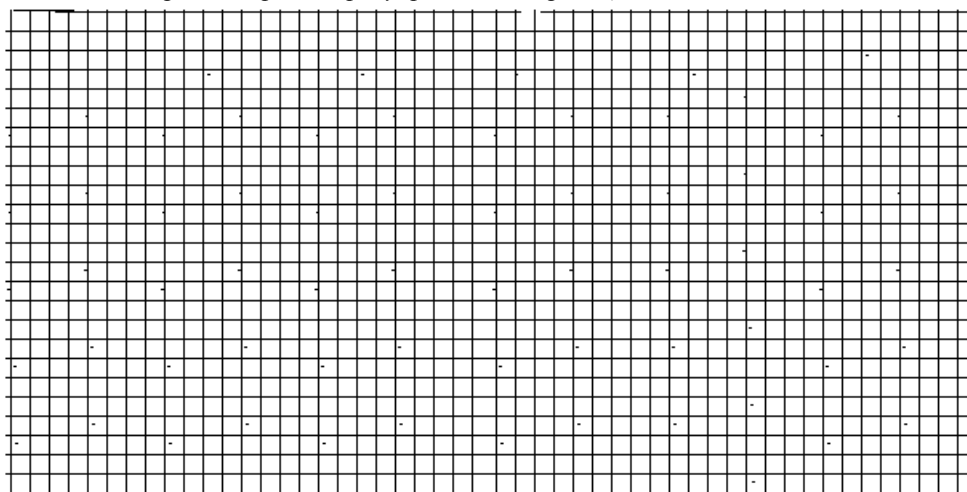
Бр. последователни точки K	B_1	B_2

Граници на регулиране:	Горна	$\mu_0 + B_1 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	
	Долна	$\mu_0 - B_1 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	
Предупредителни граници:	Горна	$\mu_0 + B_2 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	
	Долна	$\mu_0 - B_2 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	

Да се състави контролна карта с предупредителни граници по следните резултати от контрол на 19 извадки:

Резултати $\bar{X}$

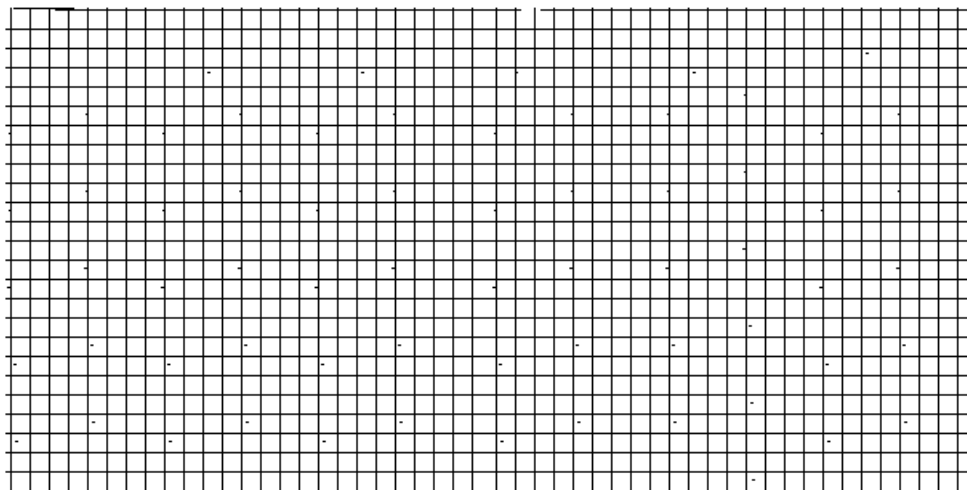
25,1	25,2	24,2	25,6	24,1	24,3	25	25,3	25,9	24,7
25,1	25,3	24,9	25,4	24,8	24,7	25,9	25,6	25,7	



Заключение:

.....

За същите данни да се състави контролна карта на Шухарт с предупредителни граници и да се сравнят резултатите от двете карти.



Заключение:

.....

КОНТРОЛ НА КАЧЕСТВОТО

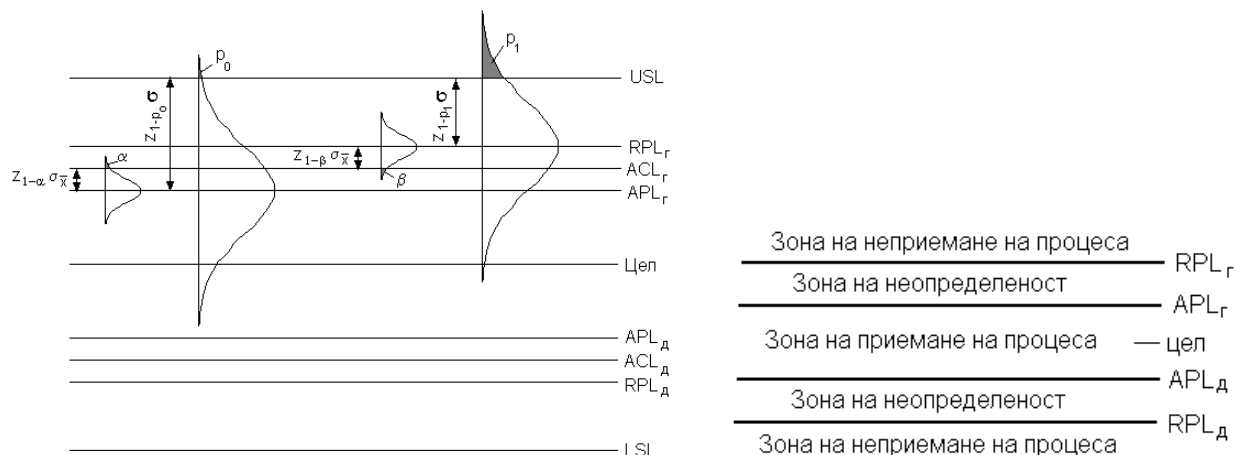
Тема 4 Статистически контрол на процеси

4.7. Приемателни контролни карти

ISO 7966

На статистическо наблюдение е подложен процес на напълване на бутилки с разтвор с обем $10 \pm 0,5 \text{ cm}^3$. Предварително е известно, че $\sigma = 0,1 \text{ cm}^3$. Процесът се счита за приемлив, ако извън границите $10 \pm 0,5$ излизат 0,1% ($p_0 = 0,001$) и за неприемлив, ако извън границите са 2,5% ($p_1 = 0,025$). Прието е рисковете на производителя и потребителя да са $\alpha = 5\%$ и $\beta = 5\%$.

USL	LSL	σ	P_0	P_1	α	β



$APL_c = USL - z_{1-p_0} \cdot \sigma$	$RPL_c = USL - z_{1-p_1} \cdot \sigma$	$APL_o = LSL + z_{1-p_0} \cdot \sigma$	$RPL_o = LSL + z_{1-p_1} \cdot \sigma$

Контролни граници	
$ACL_c = APL_c + \left(\frac{z_{1-\alpha}}{z_{1-\alpha} + z_{1-\beta}} \right) (RPL_c - APL_c)$	$ACL_o = APL_o - \left(\frac{z_{1-\alpha}}{z_{1-\alpha} + z_{1-\beta}} \right) (APL_o - RPL_o)$

Забележка: $z_{1-A} = \text{NORMSINV}(1-A)$

Обем на извадките
$n = \left(\frac{(z_{1-\alpha} + z_{1-\beta}) \sigma}{RPL - APL} \right)^2 = \dots\dots\dots$
Приема се $n = \dots\dots\dots$

Да се състави приемателна контролна карта по резултати от контрола на 16 извадки (дадени са средноаритметичните стойности):

10.1	9.8	9.9	10.1	10	9.9	10.05	10.2	9.8	9.9	9.9	10.1	10.1	10.2	9.9	10.1
------	-----	-----	------	----	-----	-------	------	-----	-----	-----	------	------	------	-----	------

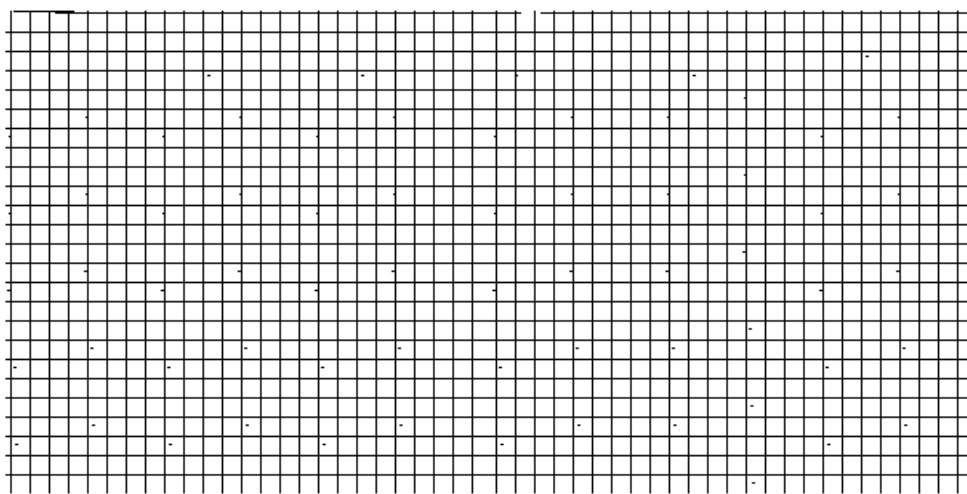
Заклучение:

.....

Какво ще бъде заключението при попадане на точка в зоната на неопределеност – в интервала между APL и ACL, както и в интервала ACL - RPL?

Приемателна контролна карта

ISO 7966



КОНТРОЛ НА КАЧЕСТВОТО

Тема 5. Приемателен статистически контрол по количествен признак

A. Едностранно ограничено допусково поле, *s*-метод

(ISO 3951-1)

Максималната допустима стойност е 60 (USL=60). Обемът на партидата е N=100. Прието е равнище на контрол II, нормален контрол, Приемателно равнище на дефектност AQL=2,5%.

USL	Обем на партидата N	Равнище на контрол	Вид контрол	AQL
60	100	II	нормален	2,5%

Буквен код	Обем на извадката n	Контролен норматив k

Резултатите от проведения контрол:

53	57	49	58	59	54	50	56	58	50	54	55	57
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

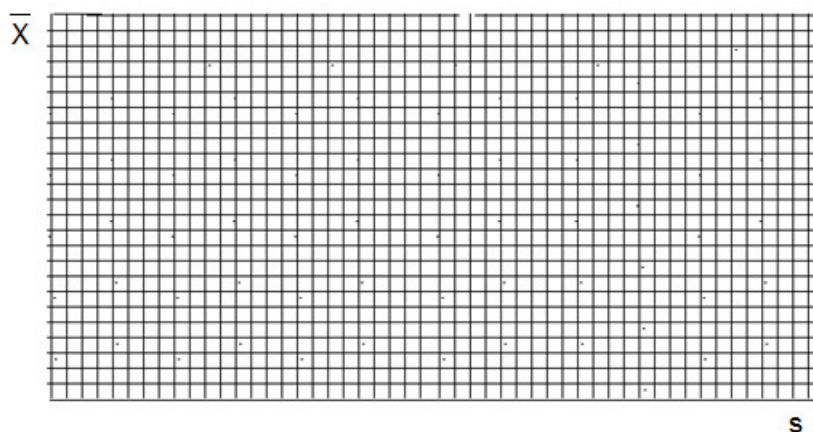
$\bar{X}$ (AVERAGE)	s (STDEV)	$Q = \frac{USL - \bar{X}}{s}$

Критерий за приемане $Q \geq k$

Заключение:

.....

Графичен метод:



Построява се права с уравнение $\bar{X} = USL - ks$ (при зададена горна граница) или $\bar{X} = LSL + ks$ (при зададена долна граница). При зададена горна граница областта на приемане е под линията, а при зададена долна граница областта на приемане е над линията. На графиката се нанася точката с координати $(s, \bar{X})$. Ако тази точка се намира в областта на приемане, партидата се приема, в противен случай се отхвърля.

(Правата се строи по две точки – например при $s=0$ и $s=3$)

Заключение:

.....

КОНТРОЛ НА КАЧЕСТВОТО

Тема 5. Приемателен статистически контрол по количествен признак

Б. Двустранно ограничено допусково поле, *s*-метод

(ISO 3951-1)

Зададени са горна и долна граници на допусковото поле: USL = 70; LSL=60. Обемът на партидите е N=96.

Използва се равнище II, нормален контрол с AQL=4%.

Буквен код (табл. A1)	Обем на извадката n (табл. A2)	f_s (табл. D1)

Резултатите от проведения контрол:

65,8	60	65,2	61,7	69	67,1	60	66,4	68	62,8	60,7	63,4	65,5
------	----	------	------	----	------	----	------	----	------	------	------	------

$\bar{X}$ (AVERAGE)	s (STDEV)	$s_{max}=(USL-LSL).f_s$

Процедурата продължава при $s < s_{max}$

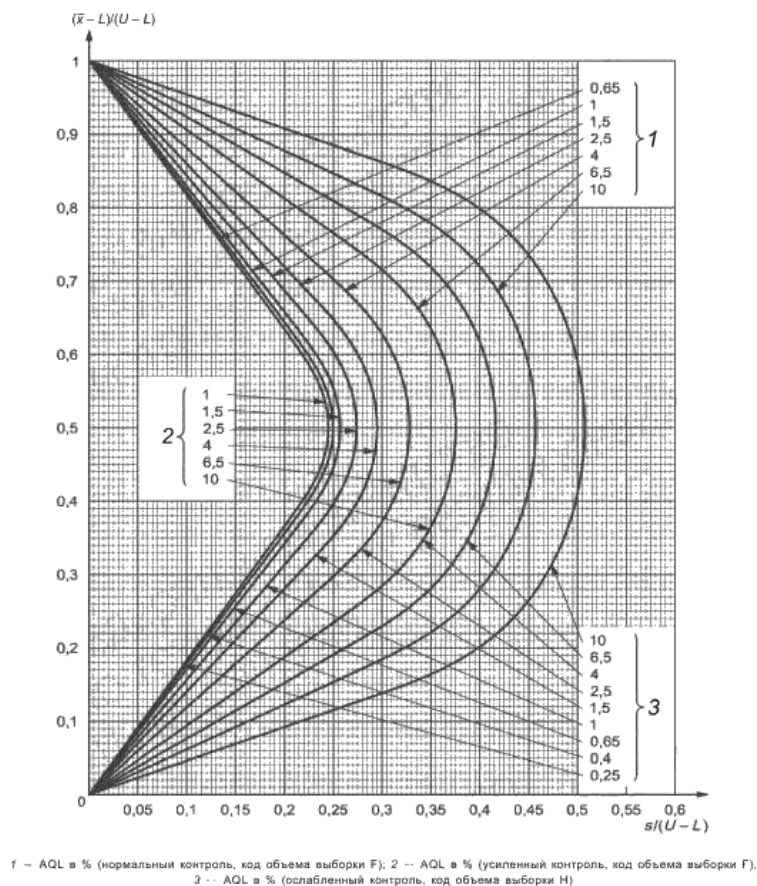
Контролен норматив k (табл. B1)	$LCL=LSL+ks$	$UCL=USL-ks$



Заклучение:

.....

Графичен метод:



КОНТРОЛ НА КАЧЕСТВОТО

Тема 5. Приемателен статистически контрол по количествен признак

В. Двустранно ограничено допусково поле, σ -метод (ISO 3951-1)

Изискванията към електрическо съпротивление са $520 \pm 50\Omega$. Големината на партидите е $N=2500$.

Прието е равнище на контрол II, нормален контрол, $AQL=4\%$. Стойността на $\sigma=19$ е известна от направено предварително изследване.

LSL	USL	N	AQL	σ

f_σ (табл. E1)		$\sigma_{\max}=(USL-LSL).f_\sigma$		$\sigma < (>) \sigma_{\max}$	Заклучение относно продължаване на процедурата или отхвърляне на партидата:
-----------------------	--	------------------------------------	--	------------------------------	---

Буквен код (табл. A1)	Обем на извадката n (табл. A2)	Контролен норматив k (табл. C1)

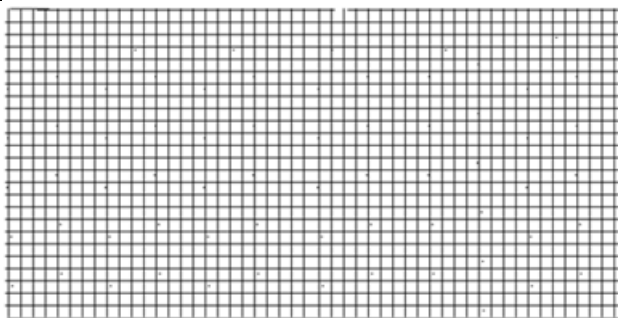
Резултати от контрол:

543	491	515	483	509	526	522	499	512	Средна стойност $\bar{X}$
479	507	521	536	514	507	484	530	492	

$LCL=LSL+k\sigma$		Заклучение относно приемане или отхвърляне на партидата:
$UCL=USL-k\sigma$		

Да се построи оперативната характеристика (ОС-кривата):

$p_a = NORMSDIST\left\{\sqrt{n}[NORMSINV(1-p)-k]\right\}$	p	p_a
	0,02	
	0,04	
	0,08	
	0,12	
	0,15	
	0,20	



Да се определи риска на производителя α :

$\alpha = NORMSDIST\left\{\sqrt{n}[k - NORMSINV(1 - AQL)]\right\}$ или $\alpha=1-p_a$ (при $p=AQL$)	
--	--

Да се определи вероятната дефектност:

C_p (USL-LSL)/6 σ	При $C_p < 1$	$p = 1 - NORMSDIST\left(\frac{USL - \bar{X}}{\sigma}\right) + NORMSDIST\left(\frac{LSL - \bar{X}}{\sigma}\right)$	
	При $C_p > 1$	$p = 1 - NORMSDIST(3C_{pk})$	

Контролен норматив k, определен не от таблица, а по формулата:

$k = z_{1-AQL} - \frac{1}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha}$ или $k = NORMSINV(1 - AQL) - \frac{NORMSINV(1 - \alpha)}{SQRT(n)}$	
--	--

КОНТРОЛ НА КАЧЕСТВОТО

Тема 5. Приемателен статистически контрол по количествен признак

Г. Последователни извадкови планове по количествен признак (ISO 3951-5)

Изискванията към електрическо съпротивление са $520 \pm 50\Omega$. Да се приложи последователен приемателен контрол по ISO 3951-5. Големината на партидите е $N=2500$. Прието е равнище на контрол II, нормален контрол, $AQL=4\%$. Стойността на $\sigma=19$ е известна от направено предварително изследване.

LSL	USL	N	AQL	σ

f_σ (табл. E1)		$\sigma_{\max}=(USL-LSL).f_\sigma$		$\sigma < (>) \sigma_{\max}$	Заклучение относно продължаване на процедурата или отхвърляне на партидата:
-----------------------	--	------------------------------------	--	------------------------------	---

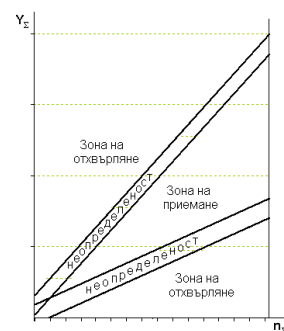
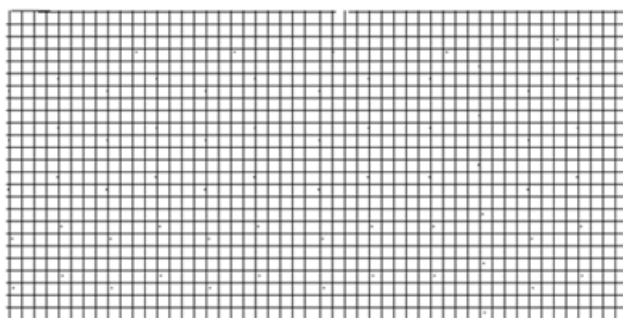
Буквен код (табл. A1)	n_1 (табл. A1a)	g (табл. A1a)	h_A (табл. A1a)	h_R (табл. A1a)

Графичен метод

Построяват се четирите прави с уравнения:

	$A_L = g \cdot \sigma \cdot n_\Sigma + h_A \sigma$	$A_U = (USL - LSL - g\sigma) n_\Sigma - h_A \sigma$	$R_L = g\sigma n_\Sigma - h_R \sigma$	$R_U = (USL - LSL - g\sigma) n_\Sigma + h_R \sigma$
$n_\Sigma=1$				
$n_\Sigma=n_1$				

Заб.: Правите могат да се построят по две точки, например при $n_\Sigma=1$ и при $n_\Sigma=n_1$



n_Σ	Резултат от контрола x_i	$y_i = x_i - LSL$	Y_Σ
1	515		
2	491		
3	479		
4	507		
5	543		
6	521		
.			
.			
.			

На графиката се нанася точка с координати $(n_\Sigma; Y_\Sigma)$. Ако точката е в зоната на приемане, партидата се приема. Ако точката е в зоната на отхвърляне, партидата се отхвърля. Ако точката е в зоната на неопределеност се взема следващо изделие за проверка.

Заклучение:

Да се сравни обема на извадките при прилагане на приемателен контрол по ISO 3951-1 и ISO 3951-5

n (ISO 3951-1)	
n_Σ (ISO 3951-5)	

КОНТРОЛ НА КАЧЕСТВОТО

Тема 6. Приемателен статистически контрол по качествен признак

Пример: Ако клиент поръча 15000 изделия, доставяни на партиди по 1000 месечно, производителят може да организира непрекъснато производство и да приложи приемателен контрол по ISO2859-1, т.е да избере план за контрол партида по партида.

За такъв план основа за избора е договорена стойност на границата на приемателно равнище на качеството AQL и равнище на контрол (обикновено II равнище), а интересите на заинтересованите страни (производител и клиент) се защитават чрез възможността за преминаване от нормален към отслабен или към засилен контрол съответно при подобряване или влошаване на качеството.

Договорена е стойност на AQL=1% и равнище на контрол II.

Обем на партидата N=1000

От табл.1 се избира кодова буква J, а от табл 2A,2B,2C за простепенен план при AQL=1, параметрите на плана са:

За нормален контрол обема на извадката е n=80, приемателното число е Ac=2, отхвърлящото число е Re=3

За отслабен контрол обема на извадката е n=32, приемателното число е Ac=1, отхвърлящото число е Re=2

За засилен контрол обема на извадката е n=80, приемателното число е Ac=1, отхвърлящото число е Re=2

AQL=1									
Големини на партидата за равнище на контрол		Буквен код за големина на извадката	Големина на извадката <i>n</i> за обикновен и засилен контрол	Нормален контрол		Засилен контрол		Отслабен контрол	
равнище II				Ac	Re	Ac	Re	Големина на извадката <i>n</i>	Ac
51 до 90		E	13	0	1		↓	5	0 1
91 до 150		F	20		↑	0	1	8	↑
151 до 280		G	32		↓		↓	13	↓
281 до 500		H	50	1	2		↓	20	↓
501 до 1 200		J	80	2	3	1	2	32	1 2
1 201 до 3 200		K	125	3	4	2	3	50	2 3
-		L	200	4	5	3	4	80	3 4

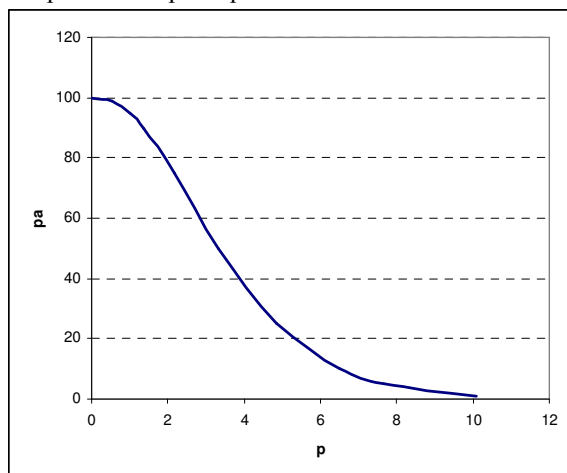
Този план позволява на производителя при добро качество (приети са 10 последователни партиди) да намали обема на извадките на n=32, т.е. да намали разходите за контрол. Общо от произведени 15000 изделия на контрол ще бъдат подложени 960. От друга страна планът защитава клиента, като ако от 5 последователни партиди 2 не бъдат приети (влошено качество) ще се премине към засилен контрол, при който ще бъдат подложени на контрол 1200 при два пъти по-малка стойност на приемателното число.

Рискът на производителя при нормален контрол ще бъде 4,66% (табл.5A), при усилен контрол 19,1%, а при отслабен контрол – 4%.

Рискът на потребителя при нормален контрол е 6,5%, при усилен контрол 4,78%

Границата на средното изходно качество AOQL при нормален контрол е 1,7%

Оперативна характеристика на плана



Ако се приеме двустепенен план:

Планове за двукратно взимане на извадка за обикновен,
засилен и намален контрол, AQL = 1,0

Големина на партидата за нива на контрол	Буквен код	Извадка	Големина на извадката n нормален и засилен контрол	Нарастваща големина на извадката	Нормален контрол	Засилен контрол	Намален контрол		
							Големина на извадката n	Нарастваща големина на извадката	
II					Ac Re	Ac Re			Ac Re
281 до 500	H	1 ^{ва} 2 ^{ра}	32 32	32 64	0 2 1 2	↓			↓
501 до 1 200	J	1 ^{ва} 2 ^{ра}	50 50	50 100	0 3 3 4	0 2 1 2	20 20	20 40	0 2 1 2
1 201 до 3200	K	1 ^{ва} 2 ^{ра}	80 80	80 160	1 3 4 5	0 3 3 4	32 32	32 64	0 3 3 4

Големина на извадката n нормален и засилен контрол – 2 извадки по 50 – общо 100

При нормален контрол 1-ва извадка Ac=0 Re=3; Първа и втора извадки Ac=3 Re=4

При засилен контрол 1-ва извадка Ac=0 Re=2; Първа и втора извадки Ac=1 Re=2

При отслабен (намален) контрол - 2 извадки по 20 – общо 40.

При отслабен (намален) контрол 1-ва извадка Ac=0 Re=2; Първа и втора извадки Ac=1 Re=2.

Ако първите 5 партии при нормален контрол бъдат приети (откритите несъответствия са 0), общия обем на контрол за всички партии е 350. Но ако в извадката от петата партида има едно дефектно изделие, то общия обем би бил 1500 – по-голям отколкото при едностепенен план.

Тъй като се счита, че е малко вероятно при провеждане на нормален контрол на първите 5 партии броят на несъответствията в извадките да е 0 (Ac=0) то общият обем на контролираните изделия се очаква да е по голям отколкото при едностепенен контрол, поради което се избира едностепенен план.

Параметри на избрания план:

	Нормален контрол	Отслабен контрол	Засилен контрол
Обем на извадката	80	32	80
Приемателно число	2	1	1
Отхвърлящо число	3	2	2
AQL	1%		
Риск на производителя, %	4,66	4	19,1
Риск на потребителя, %	6,5		4,8

Ако клиентът допълнително поръча по-малко от 5 партии, то защитата на интересите на заинтересованите страни чрез правилата за преминаване от нормален към отслабен или усилен контрол не могат да се използват и в такъв случай по-подходящ би бил план за контрол на изолирана партида съгласно ISO2859-2.

В този случай изходен параметър за избора на план е граничното качество LQ.

От оперативната характеристика при 10% риск на потребителя отговаря приблизително 5,8 Приема се LQ=5%.

Извадкови планове за некритични несъответствия,
процедура A, LQ = 5

Обем на партида	План за взимане на извадка
501 до 1 200	$n=80$; Ac=1; PLQ = 0,079
ЗАБЕЛЕЖКА: Стойностите са взети от Таблица D1 на ISO 2859-2.	

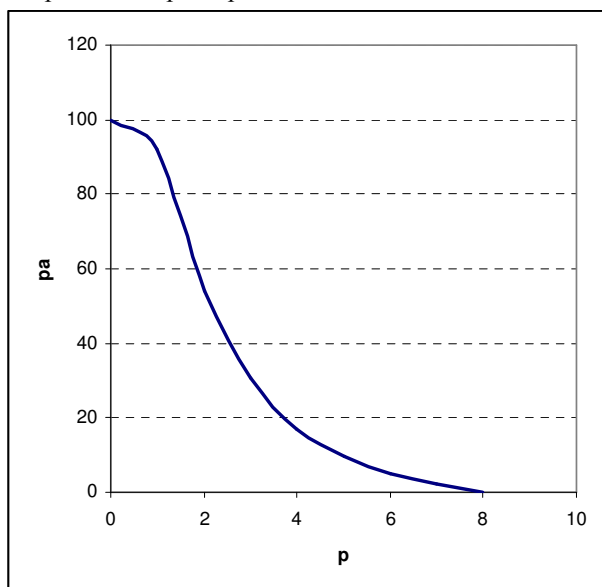
Обем на извадката – $n=80$

Приемателно число $A_c=1$

Вероятност за приемане при гранично качеството – 0,079 (7,9%)

При процент несъответствия 0,417%, вероятността за приемане е 96%.

Оперативна характеристика на плана



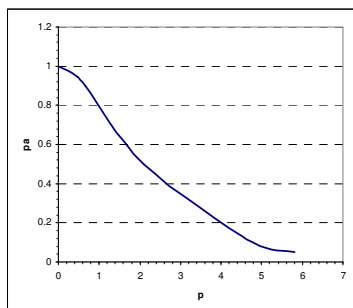
При $LQ=5\%$ - CRQ е в границите от 4,64 до 5,35

Обемите на извадките и приемателното число при план по ISO2859-1 (контрол на непрекъснати серии) и по ISO2859-2 (контрол на изолирана партида) са еднакви, но параметрите на оперативните характеристики са различни. Така например при риск на потребителя 10%, дефектността p в първия случай е 6,5%, а във втория – 5%, като по този начин се защитават интересите на потребителя.

Пример: Производител е осигурил непрекъснат процес на производство на изделие (произвежда годишно 100 партии с обем $N=1000$), което предлага на различни клиенти. За контрол прилага план по ISO2859-1 (на основата на AQL – гарантиращо средното равнище на качество на всички партии). Един от клиентите заявява 5000 изделия (5 партии), които разглежда като изолирани (тъй като са по-малко от 10) и счита, че интересите му не могат да бъдат защитени от ISO2859-1, затова държи приемането да става по ISO2859-2. За случая е приложима процедура В. Клиентът изисква гранично качество $LQ=5\%$. (LQ - равнище на качеството- процент несъответстващи изделия в отделна партида, с малка вероятност за приемане – обикновено 10%).

Избор на едностепенен план по ISO 2859-2, процедура В, равнище на контрол II:

От табл. D5 - ISO 2859-2 се определя $AQL=0,65$. От табл.20- ISO2859-2 са избира кодова буква J, обема на извадката $n=80$, приемателно число $A_c=1$. Тъй като планът е едностепенен, отхвърлящото число е с единица по-голямо. От табл.20 (ISO2859-2) се определя оперативната характеристика:



Вероятността за приемане при гранично качество $LQ=5$ е 8,6%.

Ако производителят използва план по ISO 2859-1 при $AQL=0,65$ (табл.1 и 2A), то параметрите на плана при нормален контрол са същите (кодвата буква J, обема на извадката $n=80$, приемателно число $A_c=1$, отхвърлящо число $Re=2$). Но интересите на производителя се защитават от възможността при добро качество (пет последователно приети партии) да се премине към отслабен контрол, при който обема на извадките се намалява на $n=32$ (табл.2C).

Оперативната характеристика се определя от табл. 10-J.

Пример: Производителят е осигурил непрекъснато производство на изделие. Клиентът класифицира несъответствията в две групи – основни несъответствия (група А) и несъответствия от група Б.

Изисква (договорена е) граница на приемателно равнище на качеството за несъответствията от гр.А – $AQL=1\%$ и за несъответствията от гр.Б – $AQL=2,5\%$. Обемът на партидите е $N=1000$. Договорено е II равнище на контрол.

Да се състави план за приемателен контрол по качествен признак. Приложим е ISO 2859-1.

Приема се да се използва едностепенен план.

От табл.1, ISO2859-1 се определя кодова буква J, а от табл.2А,В,С – обем на извадката при нормален и усилен контрол $n=80$, при отслабен контрол $n=32$.

Приемателните и отхвърлящите числа са (табл.2А,В,С):

За несъответствията от гр.А

нормален контрол - $A=2, R=3$

отслабен контрол - $A=1, R=2$

засилен контрол - $A=1, R=2$

За несъответствията от гр.Б

нормален контрол - $A=5, R=6$

отслабен контрол - $A=3, R=4$

засилен контрол - $A=3, R=4$

ВЪПРОСИ ЗА САМОПОДГОТОВКА

- Какви са видовете показатели на качеството?
 - Кои са критични показатели на качеството?
 - Какви са предимствата и недостатъците на експертните методи за оценка на качеството?
 - В какво се състои разчетния метод за оценка на качеството?
 - Класификация на методите за контрол на качеството според мястото в жизнения цикъл на продукта
 - Кои са основни принципи на контрола на качеството?
 - Какво трябва да включва плана за контрол?
 - В кои случаи е ефективно прилагането на самоконтрол?
 - Какви са правилата за доказване на съответствието?
 - Какви могат да бъдат видовете несъответствия?
 - Какво се разбира под критично несъответствие?
-
- Кои извадкови характеристики могат да се използват за оценка на положението на центъра на групиране на съвкупност от данни?
 - Как се оценява разсейването на средната стойност на различни извадки, направени от една и съща съвкупност?
 - От какво зависи разсейването на средната стойност на различни извадки, направени от една и съща съвкупност?
 - Как се извършва проверка за нормално разпределение?
 - Как се извършва проверката на хипотезата за равенство на средната стойност и на желаната стойност при известно σ ?
 - Какъв е критерия за равенство на средната стойност на желана (целева) стойност при известно σ ?
 - По какво се различава проверката на хипотезата за равенство на средната стойност и на желаната стойност при известно и неизвестно σ ?
 - Посочете поне два примера за приложение на проверка на хипотезата за равенство на средната стойност на желана стойност
 - Как може да се оцени възможността на технологичен процес да осигури желано качество?
 - Как може да се оцени дали даден технологичен процес осигурява желаното качество?
 - Как може да се процедира при оценка на възможностите на процеса в случаите, когато събраните данни не са нормално разпределени?
-
- В кои случаи се счита, че процеса се намира в статистически управляемо състояние?
 - В кои случаи се сигнализира за специфични смущения в процеса при прилагането на статистически процесен контрол?
 - Какво е основното предназначение на контролните карти на Шухарт?
 - Какъв вид контролна карта е подходяща за следене на измененията на центъра на групиране при статистически процесен контрол със значително естествено систематично въздействие (доминиращ фактор)?
 - Какъв вид контролна карта е подходяща за следене на малки измененията на центъра на групиране при статистически процесен контрол?
 - В кои случаи е подходящо използването на контролни карти на кумулативните суми (CUSUM-карти)?
 - Коя контролна карта има ниска чувствителност към сравнително неголеми измествания на нивото на процеса?
 - Какъв е рискът погрешно да се счита че е възникнало изместване на процеса при използване на контролна карта на Шухарт?

- На какво основание Шухарт предлага контролните граници на $\bar{X}$ -карта да са: целевата стойност $\pm \frac{3}{\sqrt{n}} \sigma$?
- Какво приложение имат методите за анализ на временни редове в управлението на качеството?
- Каква е разликата между p и pn контролни карти?
- Каква е разликата между c и u контролни карти и за какво се използват?
- В кои случаи многостепенните извадкови планове за приемателен статистически контрол са за предпочитане пред едностепенните?
- В кои случаи се предпочита последователният извадков план за приемателен статистически контрол по количествен признак?
- В кои случаи се предпочита последователният извадков план за приемателен статистически контрол по алтернативен признак?
- Какво представлява многостепенния извадков план за приемателен статистически контрол по алтернативен признак?
- Какви са изискванията за прилагане на приемателен статистически контрол по количествен признак?
- Какво представлява риска на производителя и риска на потребителя при приемателния статистически контрол?
- Как могат да се определят рисковете на производителя и потребителя при приемателния статистически контрол?
- Какво е AQL и за какво се използва?
- Какво се разбира под оперативна характеристика на извадков план?
- Каква информация може да се извлече от оперативната характеристика на конкретен извадков план?
- За какво е необходимо при приемателния статистически контрол да има нормален, отслабен и засилен контрол?
- Каква е разликата между нормален, отслабен и засилен контрол ?
- Какви са предимствата и недостатъците на приемателния статистически контрол по количествен признак спрямо приемателния статистически контрол по качествен признак?
- Какъв е критерия за приемане на партида като съответстваща на изискванията при прилагане на приемателен статистически контрол по количествен признак?
- Какъв е критерия за приемане на партида като съответстваща на изискванията при прилагане на приемателен статистически контрол по алтернативен признак?
- В какво се изразява графичния метод за приемателен статистически контрол по количествен признак?
- В какво се състои графичния метод на последователният извадков план за приемателен статистически контрол по алтернативен признак?
- Каква е разликата между σ и s – метод за приемателен статистически контрол по количествен признак? Предимства и недостатъци на σ - метода.

Приложение 1

Статистически функции в Excel

AVERAGE - Средноаритметична стойност
CHIDIST - Едностранныя вероятност на разпределението хи-квадрат
CHIINV - Обратната функция на едностранныя вероятност за хи-квадрат разпределението
CONFIDENCE - Доверителния интервал за средната стойност на генерална съвкупност
CORREL - Коефициент на корелация между два набора данни
COVAR - Ковариацията
DEVSQ - Сумата от квадратите на отклоненията
FDIST - Вероятностното F разпределение
FINV - Обратното на вероятностното F разпределение
FISHER - Трансформация на Фишер
FORECAST - Стойност от линейна тенденция
FTEST - Резултат от F-тест
LINEST - Параметрите на линейна тенденция
MEDIAN - Медиана
MODE - Мода
NORMSDIST - Стандартното нормално кумулативно разпределение
NORMSINV - Обратното на стандартното нормално кумулативно разпределение
PERCENTILE - Процентил
SLOPE - Наклон на линията на линейна регресия
STDEV - Стандартното отклонение на базата на извадка
STDEVP - Стандартното отклонение на базата на цялата генерална съвкупност
STEYX - Стандартната грешка на прогнозираната стойност на y за всяко x в регресията
TDIST - t-разпределение на Стюдент
TINV - Обратното на t-разпределението на Стюдент
TREND - Стойности от линейна тенденция
TTEST - Вероятността, свързана с t-теста на Стюдент
VAR - Дисперсия на базата на извадка
VARP - Дисперсия на базата на цялата генерална съвкупност
ZTEST - Едностранныя стойност на вероятност на z-тест

<http://office.microsoft.com/bg-bg/excel-help/HP010079190.aspx>

Приложение 2

Контролни карти на Шухарт (ISO 8958-91)

Табл. 1

	Незададена целева стойност		Зададена е целева стойност	
	Централна линия CL	Контролни граници	Централна линия CL	Контролни граници
$\bar{X}$	$\bar{\bar{X}}$	$\bar{\bar{X}} \pm A_3 \bar{s}$ или $\bar{\bar{X}} \pm A_2 \bar{R}$	X_0	$X_0 \pm A_1 \sigma_0$
R	$\bar{R}$	$D_3 \bar{R}; D_4 \bar{R}$	R_0 или $d_n \sigma_0$	$D_1 s_0; D_2 s_0$
s	$\bar{s}$	$B_3 \bar{s}; B_4 \bar{s}$	s_0 или $c_n \sigma_0$	$B_5 \sigma_0; B_6 \sigma_0$

$$A_1 = \frac{3}{\sqrt{n}} \quad A_3 = \frac{3}{c_n \sqrt{n}} \quad B_5 \approx c_n - \frac{3}{\sqrt{2n}} \quad B_6 \approx c_n + \frac{3}{\sqrt{2n}}$$

Табл. 2

n	Контролни карти на Шухарт											
	Коефициенти за изчисляване на контролните граници											
	A ₁	A ₂	A ₃	B ₃	B ₄	B ₅	B ₆	D ₁	D ₂	D ₃	D ₄	
2	2,121	1,880	2,659	0,000	3,267	0,000	2,606	0,000	3,686	0,000	3,267	
3	1,732	1,023	1,954	0,000	2,568	0,000	2,276	0,000	4,358	0,000	2,574	
4	1,500	0,729	1,628	0,000	2,266	0,000	2,088	0,000	4,696	0,000	2,282	
5	1,342	0,577	1,427	0,000	2,089	0,000	1,964	0,000	4,918	0,000	2,114	
6	1,225	0,483	1,287	0,030	1,970	0,029	1,874	0,000	5,078	0,000	2,004	
7	1,134	0,419	1,182	0,118	1,882	0,113	1,806	0,204	5,204	0,076	1,924	
8	1,061	0,373	1,099	0,185	1,815	0,179	1,751	0,388	5,306	0,136	1,864	
9	1,000	0,337	1,032	0,239	1,761	0,232	1,707	0,547	5,393	0,184	1,816	
10	0,949	0,308	0,975	0,284	1,716	0,276	1,669	0,687	5,469	0,223	1,777	
11	0,905	0,285	0,927	0,321	1,679	0,313	1,637	0,811	5,535	0,256	1,744	
12	0,866	0,266	0,886	0,354	1,646	0,346	1,610	0,922	5,594	0,283	1,717	
13	0,832	0,249	0,850	0,382	1,618	0,374	1,585	1,025	5,647	0,307	1,693	
14	0,802	0,235	0,817	0,406	1,594	0,399	1,563	1,118	5,696	0,328	1,672	
15	0,775	0,223	0,789	0,428	1,572	0,421	1,544	1,203	5,741	0,347	1,653	
16	0,750	0,212	0,763	0,448	1,552	0,440	1,526	1,282	5,782	0,363	1,637	
17	0,728	0,203	0,739	0,466	1,534	0,458	1,511	1,356	5,820	0,378	1,622	
18	0,707	0,194	0,718	0,482	1,518	0,475	1,496	1,424	5,856	0,391	1,608	
19	0,688	0,187	0,698	0,497	1,503	0,490	1,483	1,487	5,891	0,403	1,597	
20	0,671	0,180	0,680	0,510	1,490	0,504	1,470	1,549	5,921	0,415	1,585	
21	0,655	0,173	0,663	0,523	1,477	0,516	1,459	1,605	5,951	0,425	1,575	
22	0,640	0,167	0,647	0,534	1,466	0,528	1,448	1,659	5,979	0,434	1,566	
23	0,626	0,162	0,633	0,545	1,455	0,539	1,438	1,710	6,006	0,443	1,557	
24	0,612	0,157	0,619	0,555	1,445	0,549	1,429	1,759	6,031	0,451	1,548	
25	0,600	0,153	0,606	0,565	1,434	0,559	1,420	1,806	6,056	0,459	1,541	

Стойности на коефициентите c_n и d_n в зависимост от обема на извадката

Табл. 3

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
c_n	0,798	0,886	0,921	0,940	0,952	0,959	0,965	0,969	0,973
d_n	1,128	1,693	2,059	2,326	2,534	2,704	2,847	2,970	3,078

Приложение 3
Стойности на ARL ISO 7873

Т а б л и ц а 1 – Стойности на ARL за $B_1 = 2,75$ (едностранен критерий)

$\delta\sqrt{n}$	$K = 2$					$K = 3$					$K = 4$				
	B_2					B_2					B_2				
	1,0	1,25	1,5	1,75	2,0	1,0	1,25	1,5	1,75	2,0	1,0	1,25	1,5	1,75	2,0
0,0	41,7	79,8	146,8	232,8	297,4	161,8	253,0	310,2	330,6	334,5	287,4	324,6	333,6	335,1	335,4
0,2	24,5	43,6	76,7	120,9	158,9	80,4	126,3	161,7	180,3	184,7	146,4	166,6	185,2	185,3	185,6
0,4	15,3	25,4	42,3	65,8	88,0	42,4	66,9	88,2	101,5	105,5	69,1	96,0	104,1	106,1	106,4
0,6	10,3	15,9	25,0	32,2	50,5	24,6	37,4	50,5	56,0	62,4	40,8	54,2	60,6	62,9	63,3
0,8	7,3	10,5	15,0	22,7	30,3	15,3	22,1	29,7	35,2	38,0	24,4	31,8	36,7	38,4	39,1
1,0	5,4	7,3	10,3	14,4	19,0	9,6	14,0	18,3	22,0	23,9	15,7	19,6	22,8	24,3	24,8
1,2	4,2	5,4	7,2	9,7	12,6	7,2	8,9	12,1	14,5	16,0	10,3	12,7	15,0	16,2	16,6
1,4	3,4	4,2	5,3	6,8	8,5	5,4	6,7	8,2	9,6	10,7	7,2	8,6	9,9	10,8	11,2
1,6	2,8	3,3	3,9	4,7	5,6	4,0	5,0	5,4	6,0	6,5	5,0	6,2	6,2	6,6	7,9
1,8	2,4	2,8	3,2	4,1	4,5	3,5	3,9	4,4	5,2	5,4	4,2	4,7	5,2	5,6	5,6
2,0	2,2	2,4	2,7	3,1	3,5	2,9	3,5	3,4	3,8	4,1	3,4	3,7	4,0	4,8	4,3
2,2	1,9	2,1	2,3	2,5	2,8	2,5	2,7	2,8	3,1	3,2	2,9	3,0	3,1	3,3	3,4
2,4	1,8	1,9	2,0	2,1	2,3	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,4	2,5	2,6	2,6	2,7
2,6	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	1,9	2,0	2,0	2,2	2,2	2,1	2,1	2,2	2,3	2,3
2,8	1,6	1,6	1,7	1,7	1,7	1,8	1,8	1,9	2,0	1,9	2,0	1,9	2,0	2,0	2,0
3,0	1,4	1,4	1,5	1,5	1,5	1,6	1,6	1,6	1,6	1,6	1,7	1,6	1,6	1,7	1,7
3,2	1,3	1,3	1,4	1,4	1,4	1,4	1,4	1,4	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5
3,4	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3
3,6	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2
3,8	1,1	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2

Т а б л и ц а 2 - Стойности на ARL за $B_1 = 3,00$ (едностранен критерий)

$\delta\sqrt{n}$	$K = 2$					$K = 3$					$K = 4$				
	B_2					B_2					B_2				
	1,0	1,25	1,5	1,75	2,0	1,0	1,25	1,5	1,75	2,0	1,0	1,25	1,5	1,75	2,0
0,0	43,8	83,5	186,1	346,2	556,0	215,1	422,5	620,1	711,0	734,6	535,4	624,1	730,9	738,3	739,4
0,2	25,7	48,1	92,7	151,0	275,2	101,3	194,0	301,7	365,0	385,9	245,4	341,6	380,6	389,6	391,0
0,4	16,1	27,9	50,5	89,6	141,9	51,8	95,6	159,4	192,1	210,5	117,1	174,6	203,3	212,4	214,2
0,6	10,8	17,2	26,4	39,8	76,0	28,6	49,7	78,4	87,7	115,9	59,5	89,7	111,0	117,6	121,9
0,8	8,1	11,3	17,7	28,4	43,0	19,2	28,1	43,1	55,2	66,9	35,4	48,8	62,3	69,4	71,4
1,0	5,6	7,9	11,6	17,4	25,5	11,6	17,1	25,0	33,7	39,9	19,5	40,3	36,3	41,3	43,3
1,2	4,2	5,8	8,0	11,4	16,1	7,7	11,2	14,9	20,6	24,7	11,9	17,1	22,0	25,6	27,2
1,4	3,6	4,5	5,8	7,8	11,2	6,0	7,8	10,3	13,2	15,8	8,7	11,2	15,0	16,4	17,6
1,6	3,0	3,5	4,4	5,7	7,4	4,7	5,8	7,2	8,9	10,6	6,5	7,8	9,4	10,9	11,3
1,8	2,6	2,9	3,5	4,7	5,4	3,9	4,5	5,3	6,8	7,4	5,0	5,8	6,7	7,9	8,3
2,0	2,3	2,5	2,9	3,4	4,1	3,4	3,6	4,1	4,7	5,4	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0
2,2	2,1	2,2	2,5	2,8	3,2	2,8	2,8	3,3	3,7	4,1	3,4	3,6	3,9	4,2	4,5
2,4	1,9	2,0	2,2	2,4	2,6	2,5	2,6	2,8	3,0	3,2	2,9	3,0	3,1	3,3	3,5
2,6	1,7	1,8	1,9	2,0	2,2	2,2	2,3	2,3	2,5	2,6	2,5	2,5	2,7	2,7	2,8
2,8	1,6	1,7	1,8	1,8	1,9	2,0	2,1	2,1	2,1	2,2	2,2	2,3	2,3	2,3	2,4
3,0	1,5	1,6	1,6	1,6	1,7	1,8	1,8	1,8	1,9	1,9	1,9	1,9	1,7	1,9	2,0
3,2	1,4	1,4	1,4	1,5	1,5	1,6	1,6	1,6	1,6	1,7	1,6	1,6	1,6	1,6	1,7
3,4	1,3	1,3	1,4	1,4	1,4	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5
3,6	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,4	1,4	1,4	1,4	1,4	1,4	1,4	1,4	1,4
3,8	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3

Т а б л и ц а 3 - Стойности на ARL за $B_1 = 3,25$ (едностранен критерий)

$\delta\sqrt{n}$	$K = 2$					$K = 3$					$K = 4$				
	B_2					B_2					B_2				
	1,0	1,25	1,5	1,75	2,0	1,0	1,25	1,5	1,75	2,0	1,0	1,25	1,5	1,75	2,0
0,0	45,1	94,7	212,0	481,5	987,8	448,7	618,6	1176,0	1567,8	1698,7	904,8	1454,7	1675,9	1720,8	1730,4
0,2	26,4	50,7	105,3	223,3	432,2	116,2	263,9	469,5	744,9	843,6	369,7	653,0	819,6	864,3	872,9
0,4	16,6	29,2	55,6	110,2	207,6	58,0	121,2	230,3	360,3	430,2	161,3	299,9	392,2	446,9	455,8
0,6	11,0	18,0	31,7	58,4	105,3	32,1	60,7	112,3	178,9	225,1	99,5	140,1	204,6	216,4	235,7
0,8	7,8	11,8	19,3	30,2	56,5	19,3	33,3	58,1	92,1	117,2	40,3	69,9	104,2	118,1	133,2
1,0	6,8	8,2	12,5	20,0	32,3	12,6	19,8	32,2	49,8	67,1	23,3	37,5	56,2	71,4	95,1
1,4	3,7	4,7	6,2	6,7	12,6	6,6	8,8	12,4	17,4	23,2	10,1	13,9	19,2	24,7	28,6
1,6	3,3	3,7	4,7	6,3	8,6	5,1	6,5	8,5	11,3	14,7	7,4	9,5	12,4	15,6	18,2
1,8	2,7	3,1	3,8	4,7	6,1	4,2	4,9	6,2	7,8	9,8	5,7	6,9	8,5	10,4	12,0
2,0	2,4	2,7	3,1	3,7	4,5	3,5	3,9	4,7	5,5	6,6	4,6	5,2	6,0	6,9	7,9
2,2	2,1	2,4	2,6	3,1	3,6	3,1	3,4	3,8	4,4	5,1	3,9	4,3	4,8	5,4	6,0
2,4	2,0	2,1	2,3	2,6	2,9	2,7	2,9	3,2	3,5	3,9	3,3	3,5	3,8	4,1	4,4
2,6	1,9	1,9	2,1	2,2	2,5	2,4	2,5	2,7	2,9	3,1	2,9	3,0	3,1	3,3	3,5
2,8	1,9	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3	2,3	2,5	2,6	2,5	2,6	2,6	2,7	2,8
3,0	1,6	1,7	1,7	1,8	1,9	2,0	2,0	2,1	2,1	2,2	2,2	2,2	2,3	2,3	2,4
3,2	1,5	1,6	1,6	1,6	1,8	1,8	1,8	1,8	1,9	1,9	1,9	1,9	2,0	2,0	2,0
3,4	1,4	1,4	1,5	1,5	1,5	1,6	1,6	1,7	1,7	1,7	1,7	1,7	1,7	1,7	1,8
3,6	1,4	1,4	1,4	1,4	1,4	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,6	1,6
3,8	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,4	1,4	1,4	1,4	1,4	1,4	1,4	1,4	1,4	1,4

Т а б л и ц а 4 - Стойности на ARL (двустранен критерий)

B_1	$\delta\sqrt{n}$	$K = 2$					$K = 3$					$K = 4$				
		B_2					B_2					B_2				
		1,0	1,25	1,5	1,75	2,0	1,0	1,25	1,5	1,75	2,0	1,0	1,25	1,5	1,75	2,0
2,75	0,0	20,8	39,9	73,4	116,4	148,7	80,9	126,5	155,1	165,3	167,2	143,7	162,3	166,8	167,5	167,7
	0,2	18,6	33,0	61,0	95,2	123,5	65,8	100,0	126,6	140,8	142,9	117,6	131,6	142,9	143,0	143,1
	0,4	13,9	23,5	39,7	61,7	81,3	40,3	63,3	82,6	93,5	97,4	65,8	89,3	96,2	98,0	98,1
	0,6	10,0	15,6	24,6	31,7	49,5	24,3	36,9	49,5	54,6	60,9	40,2	53,2	59,2	61,3	61,8
	0,8	7,2	10,4	14,9	22,6	30,1	15,2	22,0	29,5	35,0	37,7	24,3	31,6	36,5	38,2	38,8
3,00	0,0	21,9	41,7	93,0	173,1	278,0	107,5	211,2	310,0	355,5	367,3	267,7	312,0	325,4	329,1	329,7
	0,2	19,5	37,9	75,2	126,6	222,6	84,0	159,9	243,9	294,1	303,0	201,0	277,8	303,0	306,2	307,0
	0,4	14,6	26,0	47,8	85,5	134,2	49,7	91,7	151,5	181,8	198,0	113,1	166,7	192,3	200,0	201,3
	0,6	10,5	16,9	26,0	39,4	75,3	28,2	49,3	77,2	86,2	113,3	58,5	88,1	108,7	114,9	119,0
	0,8	8,0	11,2	17,6	28,3	42,8	19,2	28,0	42,9	54,9	66,5	35,3	48,5	61,9	68,9	70,9
3,25	0,0	22,5	47,3	106,0	240,7	493,9	224,3	309,3	588,0	783,9	849,3	452,4	727,3	837,9	860,4	865,2
	0,2	20,0	40,0	87,7	184,5	357,1	98,0	222,2	395,4	609,0	673,4	312,5	555,5	657,9	686,3	692,0
	0,4	15,1	27,7	52,9	106,2	200,8	56,5	119,0	225,1	347,8	416,7	158,7	294,1	377,8	427,9	434,8
	0,6	10,7	17,6	31,3	58,0	104,0	31,8	60,2	111,1	175,4	220,2	98,5	138,9	200,5	212,8	230,3
	0,8	7,7	11,7	19,3	30,2	56,5	19,3	33,3	58,1	92,1	117,2	40,3	69,9	104,2	118,1	133,2

При двустранен критерий и $\delta\sqrt{n} > 1$ се ползват таблици 1-3 за едностранен критерий

Приложение 4

Приемателен контрол по количествен признак (ISO 3951-1)

Таблица А.1 – Буквен код на обема на извадката и равнища на контрол

Обем на партидата	Специални равнища на контрол				Общи равнища на контрол		
	S-1	S-2	S-3	S-4	I	II	III
2 - 8	B	B	B	B	B	B	B
9 - 15	B	B	B	B	B	B	C
16 - 25	B	B	B	B	B	C	D
26 - 50	B	B	B	C	C	D	E
51 - 90	B	B	C	C	C	E	F
91 - 150	B	B	C	D	D	F	G
151 - 280	B	C	D	E	F	G	H
281 - 500	B	C	D	E	F	H	J
501 - 200	C	C	E	F	G	J	G
1201 - 3200	C	D	E	G	H	K	L
3201 - 10000	C	D	F	G	J	L	M
10001 - 35000	C	D	F	H	K	M	N
35001 - 150000	D	E	G	J	L	N	P
150001 - 500000	D	E	G	J	M	P	Q
Над 500000	D	E	H	K	N	Q	R

Таблица А.2 – Обем на извадката за буквен код и метод на контрол

Буквен код на обема на извадката	«S» метод		«σ» метод		Еквивалентен обем на извадката по ISO 2859-1 за контрол по алтернативен признак	
	Нормален и усилен контрол	Отслабен контрол	Нормален и усилен контрол	Отслабен контрол	Нормален и усилен контрол	Отслабен контрол
B	3	3	2	2	3	2
C	4	3	3	2	5	2
D	6	3	4	2	8	3
E	9	4	6	3	13	5
F	13	6	8	4	20	8
G	18	9	10	6	32	13
H	25	13	12	8	50	20
J	35	18	15	10	80	32
K	50	25	18	12	125	50
L	70	35	21	15	200	80
M	95	50	25	18	315	125
N	125	70	32	21	500	200
P	160	95	40	25	800	315
Q	200	125	50	32	1250	500
R	250	160	65	40	2000	800

Таблица Е.1 – Стойности на f_σ за максималното стандартно отклонение на процеса при контрол с две граници на допусковото поле, « σ » метод

AQL,%	f_σ	AQL,%	f_σ
0,010	0,125	0,40	0,165
0,015	0,129	0,65	0,174
0,025	0,132	1,0	0,184
0,040	0,137	1,5	0,194
0,065	0,141	2,5	0,206
0,10	0,147	4,0	0,223
0,15	0,152	6,5	0,243
0,25	0,157	10,0	0,271

табл.А1а (ISO 3951-5)

Таблица А.1 — Параметры последовательных планов выборочного контроля, соответствующих одноступенчатым планам σ метода по ISO 3951-1 для нормального контроля					Предельно допустимый уровень несоответствий AQL в виде процента несоответствующих единиц продукции																
Код объема выборки	n_0	n_1	h_A	h_R	g																
					0,01	0,015	0,025	0,04	0,065	0,10	0,15	0,25	0,40	0,65	1,0	1,5	2,5	4,0	6,5	10,0	
B	2																			*	
C	3	5	0,317	0,875														0,946	0,748	0,517	
D	4	6	0,703	1,340														1,055	0,851	0,569	
E	6	9	1,213	1,932																	
F	8	12	1,579	2,372																	
G	10	15	1,878	2,739																	
H	12	18	2,135	3,063																	
J	15	23	2,459	3,474																	
K	18	27	2,764	3,895																	
L	21	32	3,026	4,232																	
M	25	38	3,366	4,661																	
N	32	48	3,889	5,379																	
P	40	60	4,408	6,095																	
Q	50	75	4,995	6,886																	
R	65	98	5,767	7,929																	

Примечание 1 — Коды объема выборки настоящего стандарта соответствуют ISO 3951-1.

Примечание 2 — Обозначения:

* Следует использовать σ метод одноступенчатого плана в соответствии с таблицей С.1 ISO 3951-1.

➔ Подходящий план отсутствует, следует использовать первый план выборочного контроля ниже стрелки.

➔ Подходящий план отсутствует, следует использовать первый план выборочного контроля выше стрелки.

Приложение 5
Приемателен контрол по алтернативен признак (ISO 2859-1)

Таблица – Планове за еднократно взимане на извадка за обикновен,
засилен и намален контрол, AQL = 1,0

Големини на партидата за нива на контрол		Буквен код за големина на извадката	Големина на извадката <i>n</i> за обикновен и засилен контрол	Обикновен контрол		Засилен контрол		Намален контрол	
II	III			Ac	Re	Ac	Re	Големина на извадката <i>n</i>	Ac Re
51 до 90	-	E	13	0	1	↓		5	0 1
91 до 150	51 до 90	F	20	↑		0	1	8	↑
151 до 280	91 до 150	G	32	↓		↓		13	↓
281 до 500	151 до 280	H	50	1	2	↓		20	↓
501 до 1 200	281 до 500	J	80	2	3	1	2	32	1 2
1 201 до 3 200	501 до 1 200	K	125	3	4	2	3	50	2 3
-	1 201 до 3 200	L	200	4	5	3	4	80	3 4

ЗАБЕЛЕЖКИ

Стойностите са взети от Табл. на ISO 2859-1.
Големините на извадките са едни и същи за обикновен и засилен контрол.
Ac = брой за приемане
Re = брой за отхвърляне

- ↓ Не се предлага план за взимане на извадка. Използва се първия план за взимане на извадка под стрелката.
- ↑ Не се предлага план за взимане на извадка. Използва се първия план за взимане на извадка над стрелката.

Приложение 6

Двусторонние пределы $t_{\alpha, m}$ распределения Стьюдента (t-распределения)
в зависимости от уровня значимости α и числа степеней свободы m

m	α				
	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005
1	6,314	12,706	25,452	63,656	127,321
2	2,920	4,303	6,205	9,925	14,089
3	2,353	3,182	4,177	5,841	7,453
4	2,132	2,776	3,495	4,604	5,598
5	2,015	2,571	3,163	4,032	4,773
6	1,943	2,447	2,969	3,707	4,317
7	1,895	2,365	2,841	3,499	4,029
8	1,860	2,306	2,752	3,355	3,833
9	1,833	2,262	2,685	3,250	3,690
10	1,812	2,228	2,634	3,169	3,581
11	1,796	2,201	2,593	3,106	3,497
12	1,782	2,179	2,560	3,055	3,428
13	1,771	2,160	2,533	3,012	3,372
14	1,761	2,145	2,510	2,977	3,326
15	1,753	2,131	2,490	2,947	3,286
16	1,746	2,120	2,473	2,921	3,252
17	1,740	2,110	2,458	2,898	3,222
18	1,734	2,101	2,445	2,878	3,197
19	1,729	2,093	2,433	2,861	3,174
20	1,725	2,086	2,423	2,845	3,153
21	1,721	2,080	2,414	2,831	3,135
22	1,717	2,074	2,405	2,819	3,119
23	1,714	2,069	2,398	2,807	3,104
24	1,711	2,064	2,391	2,797	3,091
25	1,708	2,060	2,385	2,787	3,078
26	1,706	2,056	2,379	2,779	3,067
27	1,703	2,052	2,373	2,771	3,057
28	1,701	2,048	2,368	2,763	3,047
29	1,699	2,045	2,364	2,756	3,038
30	1,697	2,042	2,360	2,750	3,030
40	1,684	2,021	2,329	2,704	2,971
60	1,671	2,000	2,299	2,660	2,915
120	1,658	1,980	2,270	2,617	2,860

Квантили F_{α, n_1, n_2} распределения Фишера (F-распределения)
 для уровня значимости $\alpha=0,05$ в зависимости от числа степеней
 свободы n_1 и n_2

n_2	n_1															
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	30	40	60	120
1	161,4	199,5	215,7	224,8	230,2	234,0	236,8	238,9	240,5	241,9	243,9	245,9	250,1	251,1	252,2	253,3
2	18,5	19,0	19,1	19,2	19,3	19,3	19,3	19,3	19,3	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4
3	10,1	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,74	8,70	8,62	8,59	8,57	8,55
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,91	5,86	5,75	5,72	5,69	5,66
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,68	4,62	4,50	4,46	4,43	4,40
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,00	3,94	3,81	3,77	3,74	3,70
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,57	3,51	3,38	3,34	3,30	3,27
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,28	3,22	3,08	3,04	3,01	2,97
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,07	3,01	2,86	2,83	2,79	2,75
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,91	2,85	2,70	2,66	2,62	2,58
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,79	2,72	2,57	2,53	2,49	2,45
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,69	2,62	2,47	2,43	2,38	2,34
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,60	2,53	2,38	2,34	2,30	2,25
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,53	2,46	2,31	2,27	2,22	2,18
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,48	2,40	2,25	2,20	2,16	2,11
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,42	2,35	2,19	2,15	2,11	2,06
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,38	2,31	2,15	2,10	2,06	2,01
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,34	2,27	2,11	2,06	2,02	1,97
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,31	2,23	2,07	2,03	1,98	1,93
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,28	2,20	2,04	1,99	1,95	1,90
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,25	2,18	2,01	1,96	1,92	1,87
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,23	2,15	1,98	1,94	1,89	1,84
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27	2,20	2,13	1,96	1,91	1,86	1,81
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,18	2,11	1,94	1,89	1,84	1,79
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24	2,16	2,09	1,92	1,87	1,82	1,77
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,15	2,07	1,90	1,85	1,80	1,75
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25	2,20	2,13	2,06	1,88	1,84	1,79	1,73
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19	2,12	2,04	1,87	1,82	1,77	1,71
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18	2,10	2,03	1,85	1,81	1,75	1,70
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,09	2,01	1,84	1,79	1,74	1,68
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	2,00	1,92	1,74	1,69	1,64	1,58

Квантили G_{α, m_1, m_2} распределения Кохрена для уровня значимости $\alpha = 0,05$ в зависимости от числа степеней свободы m_1 и m_2

m_1														
m_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	16	36	144	
2	0,9985	0,9750	0,9392	0,9057	0,8772	0,8534	0,8333	0,8159	0,8010	0,7880	0,7341	0,6602	0,5813	
3	0,9669	0,8709	0,7977	0,7457	0,7071	0,6771	0,6530	0,6333	0,6167	0,6025	0,5466	0,4748	0,4031	
4	0,9065	0,7679	0,6841	0,6287	0,5895	0,5598	0,5365	0,5175	0,5017	0,4884	0,4366	0,3720	0,3093	
5	0,8412	0,6838	0,5981	0,5441	0,5065	0,4783	0,4564	0,4387	0,4241	0,4118	0,3645	0,3066	0,2513	
6	0,7808	0,6161	0,5321	0,4803	0,4447	0,4184	0,3980	0,3817	0,3682	0,3568	0,3135	0,2612	0,2919	
7	0,7271	0,5612	0,4800	0,4307	0,3974	0,3726	0,3535	0,3384	0,3259	0,3154	0,2756	0,2278	0,1833	
8	0,6798	0,5157	0,4377	0,3910	0,3595	0,3362	0,3185	0,3043	0,2926	0,2829	0,2462	0,2022	0,1616	
9	0,6385	0,4775	0,4027	0,3584	0,3286	0,3067	0,2901	0,2768	0,2659	0,2568	0,2226	0,1820	0,1446	
10	0,6020	0,4450	0,3733	0,3311	0,3029	0,2823	0,2666	0,2541	0,2439	0,2355	0,2032	0,1655	0,1308	
12	0,5410	0,3924	0,3264	0,2880	0,2626	0,2439	0,2299	0,2187	0,2098	0,2020	0,1737	0,1403	0,1100	
15	0,4709	0,3346	0,2758	0,2419	0,2195	0,2034	0,1911	0,1815	0,1736	0,1671	0,1429	0,1144	0,0889	
20	0,3894	0,2705	0,2205	0,1921	0,1735	0,1602	0,1501	0,1422	0,1357	0,1303	0,1108	0,0879	0,0675	
24	0,3434	0,2354	0,1907	0,1656	0,1493	0,1374	0,1286	0,1216	0,1160	0,1113	0,0942	0,0743	0,0567	
30	0,2929	0,1980	0,1593	0,1377	0,1237	0,1137	0,1061	0,1002	0,0958	0,0921	0,0771	0,0604	0,0457	
40	0,2370	0,1576	0,1259	0,1082	0,0968	0,0887	0,0827	0,0780	0,0745	0,0713	0,0595	0,0462	0,0347	
60	0,1737	0,1131	0,0895	0,0765	0,0682	0,0623	0,0583	0,0552	0,0520	0,0497	0,0711	0,0316	0,0245	
120	0,0998	0,0632	0,0495	0,0419	0,0371	0,0337	0,0312	0,0292	0,0279	0,0266	0,0218	0,0168	0,0120	

Литература

1. БДС ISO 3534-2:2003 - Статистика. Речник и означения. Част 2: Статистически контрол на качеството
2. БДС ISO 2602:2003 - Статистическа интерпретация на резултатите от изпитване. Оценяване на средната стойност. Доверителен интервал
3. БДС ISO 3301:2003 - Статистическа интерпретация на данни. Сравняване на две средни стойности в случай на двойни наблюдения
4. БДС ISO 3494:2008 - Статистическа интерпретация на данни. Мощност на критериите, отнасящи се до средните стойности и дисперсиите
5. БДС ISO/TR 10017:2006 - Указание за статистически методи за ISO 9001:2000
6. БДС ISO 2859-1:2007 - Процедури за вземане на извадки за контрол по качествени признаци. Част 1: Планове за вземане на извадки, индексирани по граница за качество за приемане (AQL), за контрол партида по партида
7. БДС ISO 2859-2:2007 - Процедури за вземане на извадки за контрол по качествени признаци. Част 2: Планове за вземане на извадки, индексирани по граница за качество (LQ), за контрол на изолирана партида
8. БДС ISO 2859-3:2012 - Процедури за вземане на извадки за контрол по качествени признаци. Част 3: Процедури за вземане на извадки чрез пропускане на партида
9. БДС ISO 2859-4:2007 - Процедури за вземане на извадки за контрол по качествени признаци. Част 4: Процедури за оценяване на декларирани равнища на качество
10. БДС ISO 2859-5:2012 - Процедури за вземане на извадки за контрол по качествени признаци. Част 5: Система от последователни планове за вземане на извадки, индексирани по граница за качество за приемане (AQL), при контрол партида по партида
11. БДС ISO 2859-10:2012 - Процедури за вземане на извадки за контрол по качествени признаци. Част 10: Въведение към серията стандарти ISO 2859 за вземане на извадки за контрол по качествени признаци
12. БДС ISO 8422:2007 - Последователни извадкови планове за контрол по качествени признаци
13. БДС ISO 8423:2011 - Последователни планове за вземане на извадки за контрол по количествени признаци за процент несъответствия (при известно стандартно отклонение)
14. БДС ISO 7870-1:2012 - Контролни карти. Част 1: Общо ръководство
15. БДС ISO 7966:2010 - Карти за контрол на приемане
16. ISO 7873-93 Контролни карти за средноаритметично с предупредителни граници
17. ISO 8258-91 Статистически методи. Контролни карти на Шухарт
18. ISO/TR 7871 Контролни карти на кумулативни суми. Ръководство по управление на качеството и анализ на данни с използване на метода CUSUM.
19. ISO 3951-1:2005 Процедури за извадков контрол по количествен признак. Част 1. Изисквания към едностепенни планове на основата на AQL за контрол на последователни партии.
20. ISO 3951-2 Процедури за извадков контрол по количествен признак. Част 2. Изисквания към едностепенни планове на основата на AQL за контрол на последователни партии по независими характеристики на качеството.
21. ISO 3951-5:2006 Процедури за извадков контрол по количествен признак. Част 5. Последователни планове на основата на AQL за известно стандартно отклонение..
22. ISO 18414:2006 Процедури за статистически приемателен контрол по алтернативен признак. Система нулево приемателно число на основата на показателя доверие към качеството на продукцията.
23. ISO 10576-1:2003 Ръководство по оценка на съответствието с установените изисквания
24. Данов Т. Статистически методи за управление на качеството, Техника, С., 1987.
25. Тасев Г. и др. Приложение на статистически методи в системите за управление на качеството, Химера, Шумен, 2007.
26. Метрология и измервателна техника, Справочник, Том1, под ред. Х. Радев, Софттрейд, С, 2008.

27. Дюкенджиев Г., Р. Йорданов, Контрол и управление на качеството, Софттрейд, София, 2012
28. Тодоров Д., Мениджмънт на качеството, Аскони издат, София, 1995.
29. Йорданов Р., Г. Дюкенджиев, Методи за оценка на качеството, Софттрейд, София, 2000.
30. Станчева В., К. Киров, Управление на качеството, Варна, 1995.
31. www.mail.dir.bg/~rsi/um.htm