

доц. д-р Р. Йорданов

Инженерни изследвания
(Основи на експерименталните изследвания)

Учебни записки

Съдържание:

1. Инженерни изследвания – общи положения	3
2. Основи на планирането на експеримента	7
3. Кратки сведения от теория на вероятностите и математическата статистика	13
4. Методи за измерване, оценка на точността, представяне и оценка на резултата	14
5. Предварителна обработка на експериментални данни	29
5.1. Определяне на параметрите на емпиричното разпределение	29
5.2. Статистическа проверка на хипотези	33
5.3. Преобразуване на разпределения към нормални	39
5.4. Дисперсионен анализ	42
6. Обработка на резултатите от пасивен експеримент	49
7. Обработка на резултатите от активен експеримент	59
8. Планове от втори порядък	63
9. Планиране на експеримента в търсене на оптимални условия	72
Приложение	81
Литература	86

1. Инженерни изследвания – общи положения

Инженерни изследвания се провеждат в сферата на инженерната практика и са насочени към конкретизиране на известни научни знания, приложими за решаването на определена инженерна задача.

Цел на инженерните изследвания – получаване на достоверна информация за разкриване на закономерностите, явленията и процесите протичащи в изследвания обект. Неясно поставената цел на изследването може да доведе до събирането на ненужни данни в процеса на наблюдението, или да не бъдат получени необходимите за последващ анализ сведения.

Инженерните изследвания могат да бъдат разделени на две основни групи – емпирични (експериментални) и теоретични. При теоретичните изследвания отсъства непосредствено практическо взаимодействие на изследователя с изучавания обект. Емпиричните изследвания се базират на непосредствено практическо взаимодействие на изследователя с изследвания обект. Тези изследвания предполагат осъществяване на наблюдения и експерименти, т.е. обектите се изучават чрез провеждане на експеримент. Ролята на експеримента е многообразна - започвайки с проверка на идеи, анализ на възможности за използване в техниката на резултати от фундаментални изследвания и завършвайки с изпитания на нова техника и технология в реални условия. Средствата за емпирично изследване включват уреди, установки и други технически средства за провеждане на реално наблюдение и експеримент.

Емпиричните изследвания могат да бъдат разделени на лабораторен експеримент и промишлен експеримент. Лабораторният експеримент се характеризира с наличието на специална експериментална установка, с помощта на която изследвания обект се изолира от околната среда (от смущаващите фактори). Именно в лабораторни условия може да се реализира оптимален експеримент, с ниско ниво на смущения (шум) и добро метрологично осигуряване.

От своя страна лабораторният експеримент може да бъде експеримент за провеждане на фундаментални изследвания, лабораторен инженерен експеримент, рутинен лабораторен експеримент. При лабораторния експеримент за провеждане на фундаментални изследвания се анализират възможностите за практическо прилагане на открития в областта на физиката, химията, биологията и т.н. При лабораторния инженерен експеримент се осъществява проверка на технически решения при създаване на нови или модернизация на съществуващи уреди, агрегати, машини, технологични линии или техни отделни части (компоненти, материали). Тази проверка може да се осъществи чрез експеримент върху реални образци (лабораторен натурален експеримент) или не върху самия обект, а върху негов модел (моделен експеримент). В зависимост от начина на моделиране се различават:

- мащабно моделиране, когато физичните процеси, протичащи в реалния обект и модела са еднакви, а различието в тях е само по големина (има мащабен характер);
- физическо моделиране, при което за удобство при провеждане на експеримента реалният обект се заменя с друг обект, с друга физическа природа, чието поведение е подобно на реалния изследван обект;

- аналогово моделиране, при което реалният обект се заменя с негов аналог (например електрически аналог), който има диференциално уравнение като на реалния – например електромеханична аналогия, електроакустична аналогия.

- математическо моделиране, при което обектът се моделира в цифров вид на електронно изчислителна машина.

При рутинния лабораторен експеримент се работи по фиксирана (утвърдена) методика, много близка до стандартните технически измервания, прилагани например при извадковия технически контрол на готова продукция (статистически приемателен контрол), или при статистическия процесен контрол, изпитванията на серийни изделия и др.

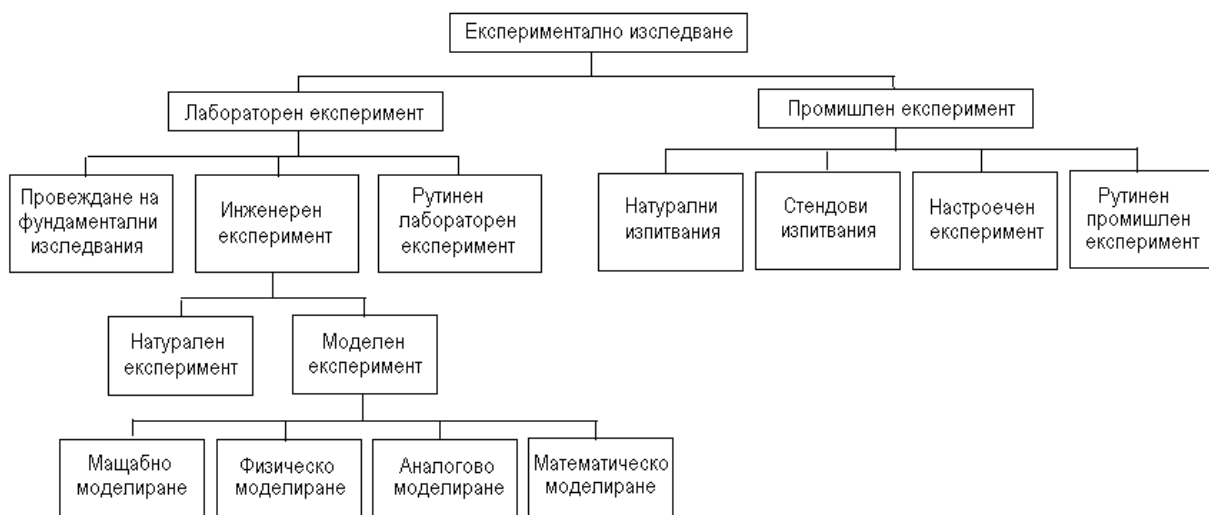
Промишленият експеримент се характеризира с това, че обекта на изследване се изучава в условия, съответстващи на възможните реални условия на експлоатация. Различават се:

- натурални изпитания, т.е. изследвания в реални експлоатационни условия за различни, в това число и критични режими;

- стендови изпитания, при които част от външната среда се имитира с помощта на спомагателни технически средства;

- настроен експеримент, предназначен за определяне в реални промишлени условия на оптималните характеристики на обекта при избран критерий за оптималност;

- рутинен промишлен експеримент – измерване на параметрите на обекта по стандартна методика (например приемно-предавателни изпитания).



фиг.1 – Класификация на експерименталните изследвания

При подготовката на изследването освен целта трябва ясно да се определи обекта на наблюдение.

Обектите на инженерно изследване се състоят от отделни елементи – наблюдавани единици, носители на признаците подлежащи на регистрация. За всяка наблюдавана единица се събират необходимите сведения – статистически данни.

Всяко явление се характеризира с множество различни признаци. Да се събира информация за всички признаци е нецелесъобразно, а в много случаи и практически невъзможно. Затова е необходимо да се определят тези признаци, които се явяват съществени, основни за характеристиките на обекта, изхождайки от целите на изследването.

План на инженерното изследване – съвкупност от данни, определящи броя, условията и реда на осъществяване на опитите. От това колко добре е разработен плана зависи качеството на събраната информация.

Пример за илюстриране влиянието на вида на плана на експеримента върху качеството на събраната информация:

Необходимо е да се измерят масите на три обекта А, В и С с аналитична везна.

I вариант (еднофакторен експеримент)

- прави се “празно” измерване за определяне на условната нула
- последователно се измерва масата на всеки обект

т.е. изучава се реакцията под въздействието на всеки фактор поотделно.

Масата на всеки обект се оценява по резултатите от два опита (единият, при който е измерван съответния обект и втория – “празния” опит):

$$m_A = y_1 - y_0; \quad m_B = y_2 - y_0; \quad m_C = y_3 - y_0$$

Дисперсията на измерване на обекта А ще бъде:

$$\sigma_A^2 = \sigma_{y_1}^2 + \sigma_{y_0}^2 = 2\sigma^2, \quad (\text{ако } \sigma_{y_1}^2 = \sigma_{y_0}^2)$$

$$\text{Аналогично } \sigma_B^2 = 2\sigma^2; \quad \sigma_C^2 = 2\sigma^2$$

Матрицата на експеримента има вида:

№ на опита	А	В	С	Резултат
1	-	-	-	y_0
2	+	-	-	y_1
3	-	+	-	y_2
4	-	-	+	y_3

* “+” → обекта е на везната; “-” → обекта не е на везната

II вариант (многофакторен експеримент)

№ на опита	А	В	С	Резултат
1	+	-	-	y_1
2	-	+	-	y_2
3	-	-	+	y_3
4	+	+	+	y_4

В първите три опита последователно се измерват обектите А, В и С. При последния опит обектите А, В и С се измерват заедно.

$$m_A = \frac{1}{2}(y_1 - y_2 - y_3 + y_4)$$

$$m_B = \frac{1}{2}(y_2 - y_1 - y_3 + y_4)$$

$$m_C = \frac{1}{2}(y_3 - y_1 - y_2 + y_4)$$

Масата на обекта А, определена по горната формула не се влияе от масата на обектите В и С, тъй като всяка от тях участва във формулата два пъти с различен знак (един път в резултата y_2 и втори път в резултата y_4).

Дисперсията, свързана с грешката на измерване ще бъде:

$$\sigma_A^2 = \frac{1}{4}(\sigma_{y1}^2 + \sigma_{y2}^2 + \sigma_{y3}^2 + \sigma_{y4}^2) = \sigma^2; \quad (\sigma_{y1}^2 = \sigma_{y2}^2 = \sigma_{y3}^2 = \sigma_{y4}^2)$$

Аналогично $\sigma_B^2 = \sigma^2$; $\sigma_C^2 = \sigma^2$

В сравнение с първия вариант дисперсията е два пъти по-малка при един и същ брой опити, т.е. точността на експеримента е увеличена. Това е така защото при първия вариант резултата се получава на базата на единично измерване на масата на обектите, а при втория вариант – на базата на двукратно измерване на масата на един и същи обект и определяне на средноаритметичната стойност, чиято средноквадратична неопределеност е $\sqrt{2}$ пъти по-малка.

Този прост пример илюстрира влиянието на избрания план за провеждане на експеримента върху достоверността на оценката.

За да се състави плана е необходимо:

- ясно да се формулира задачата на изследването
- да се определят използваните за изследването методи
- да се определят съществените признаци, които ще подлежат на наблюдение и регистрация

Основните етапи при подготовка на експеримента са:

- определяне на параметрите на обекта, които е необходимо да се променят или фиксират в хода на експеримента
- ранжиране на отделните променливи в зависимост от очакваната им степен на влияние
- планиране на експеримента

Основни етапи при провеждане на инженерни изследвания са:

- моделиране на процеса или провеждане на основния експеримент
- провеждане на допълнителни експерименти за определяне на някои величини в математическия модел или за получаване на допълнителни данни, неполучени при основния експеримент
- обработка на получените експериментални данни
- проверка на хипотезата за достоверност на получените експериментални данни
- съставяне на емпирично уравнение, изразяващо функционалната зависимост между факторите и изходните параметри.

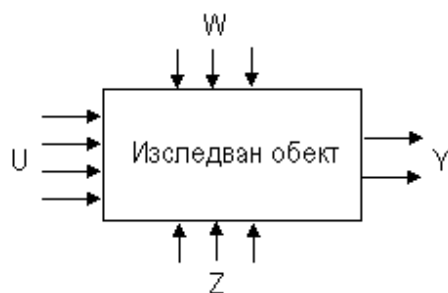
При наличие на пълна информация за механизма на изследвания процес се съставя математически модел на процеса, например във вид на система от диференциални

уравнения. За определяне на неизвестните константи в системата диференциални уравнения и за проверка на адекватност на математическия модел се провежда експеримент.

При непълна информация за механизма на процеса се извършва функционално изучаване на обекта – определят се входните (контролируеми и неконтролируеми фактори) и изходни параметри на обекта.

2. Основи на планирането на експеримента

Експериментът е система от наблюдения, извършвани с цел получаване на информация относно изследвания обект. При провеждането на експеримента обикновено механизмът на изучавания процес е известен частично или е съвсем неизвестен. В този случай изследвания обект може условно да се представи като “черна кутия” – системата от вътрешни връзки е недостъпна (или частично неизвестна) за изследователя. Известни са променливите величини, въздействащи върху обекта на изследване и величините, характеризиращи неговото състояние (фиг.2). Първите се наричат входни величини или фактори U, W, Z , а вторите – изходни величини или реакция Y .



фиг.2

Факторите се делят на три групи:

- група постоянни или случайно изменящи се в хода на изследването фактори W , стойностите на които са известни;
- група управляеми фактори U , стойностите на които се избират и целенасочено се изменят в хода на изследването (двете първи групи често се обединяват в една група *контролируеми* фактори X);
- група на *неконтролируеми* фактори Z , стойностите на които остават по една или друга причина неизвестни в хода на изследването.

Изменението на изходните величини (реакцията) Y под действие на монотонно изменящи се във времето некотнролируеми фактори се нарича временен дрейф, а зависимостта на математическото очакване на реакцията от контролируемите фактори – функция на реакцията.

Фиксираните стойности на фактора се наричат *нива на фактора*. Множеството от нива на факторите, при които се извършва измерване на реакцията се задава с матрица на условията на експеримента. Тази матрица при k фактора и m опита има вида:

$$X = \begin{vmatrix} X_{11} & X_{21} & X_{31} & \dots & X_{k1} \\ X_{12} & X_{22} & X_{32} & \dots & X_{k2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{1m} & X_{2m} & X_{3m} & \dots & X_{km} \end{vmatrix}$$

Стойностите на реакцията, получени при измерванията, също се представят с матрица, наричана матрица на наблюденията:

$$Y = \begin{vmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \dots \\ Y_m \end{vmatrix}$$

По характера на организация и методите за обработване на резултатите експериментите се делят на *пасивни* и *активни*.

При *пасивния* експеримент изследователят наблюдава обекта, без да се намесва в процеса на неговото функциониране. Доколкото нивото на факторите по случаен или закономерен начин се променят във времето, то измервайки техните стойности и стойността на реакцията се изследва зависимостта между факторите и реакцията. Планирането на пасивен експеримент се свежда до определяне на броя на опитите, необходим за провеждане на изследването.

Целта на експеримента може да бъде или определяне на връзката между реакцията и влияещите фактори или такова съчетание на нивата на управляемите фактори, при което да се постигне оптимална (екстремална – минимална или максимална) стойност на Y . Връзката между реакцията и влияещите фактори може да бъде функционална или стохастична. При функционална връзка на всяка стойност X_i еднозначно съответства стойност Y_i . В този случай ако условията на експеримента са абсолютно еднакви, при многократно повторение на опитите се получават едни и същи стойности на реакцията. За съжаление на практика трудно може да се осъществи поддържането на постоянни условия. Дори влиянието на всеки отделен случаен фактор да е малко, то съвкупността на всички фактори може съществено да повлияе на резултатите от експеримента. В този случай връзката се счита за стохастична. При стохастична връзка X_i са случайни величини и Y_i приема не една конкретна стойност, а някаква от множество стойности. Стохастичност на връзката може да се дължи както на грешки при измерването, на непълнота на модела и отчитаните фактори, така и на случайния характер на изследвания процес. Анализът на стохастична връзка се извършва с методите на корелационния, регресионния и дисперсионния анализи.

При провеждането на *активен експеримент* изследователят преднамерено променя нивата на факторите и ги поддържа на нужното ниво по време на експеримента. Към контролируемите фактори се предявяват следните изисквания, които трябва да се отчитат при подготовката на активен експеримент:

- управляемост на фактора – възможност да се поддържа определеното ниво на фактора в течение на необходимото за измерване време
- достатъчно висока точност с която да се поддържа и измерва нивото на фактора
- независимост на фактора – възможност да се задава нивото на фактора независимо от нивата на други фактори
- съвместимост на факторите - безопасно функциониране на обекта на изследване и възможност за измерване на реакцията при всички избрани нива на факторите.

Нивата на факторите могат да бъдат изразявани количествено с тяхната числена стойност, но могат да бъдат изразявани и качествено, като във втория случай на всяко ниво се присвоява определен код. Например ако качествен фактор е вид на материала и той приема три нива, това могат да бъдат материали с код А, В и С.

За опростяване на пресмятанията при обработката на резултатите се препоръчва количествените фактори да се преобразуват в безразмерни величини и по възможност с целочислени стойности. Такова преобразуване може да се извърши по формулата:

$$x_{ij} = \frac{(X_{ij} - \bar{X}_j)}{\Delta X_j},$$

където x_{ij} – преобразуваното i -то ниво на j -ти фактор; X_{ij} – натуралната стойност на i -то ниво на j -ти фактор; ΔX_j – постоянната стъпка на изменение на натуралната стойност на j -ти фактор; r – брой на нивата на фактора;

$$\bar{X}_j = \frac{1}{r} \sum X_{ij}$$

Например, ако фактора j има $r=5$ нива с натурални стойности 5,2; 10,2; 15,2; 20,2; 25,2 със стъпка $\Delta X_j=5$, то преобразуваните стойности ще бъдат: $x_{1j}=(5,2-15,2)/5=-2$; $x_{2j}=-1$; $x_{3j}=0$; $x_{4j}=1$; $x_{5j}=2$.

За да бъдат преобразуваните стойности цели числа се препоръчва броя на нивата на факторите r да бъде нечетно число.

Преобразуването може да се извърши и по формулата:

$$x_{ij} = 1 + \frac{X_{ij} - X_{j\min}}{\Delta X_j}$$

където $X_{j\min}$ е минималното ниво на j -ти фактор

Тогава за горния пример преобразуваните стойности ще бъдат 1, 2, 3, 4, 5.

При планирането на експеримента най-често се използват планове от първи порядък. Това са такива планове, които позволяват да се проведе експеримент за определяне на уравнението на регресия, което е полином от първа степен. Минималният необходим брой нива на факторите е с единица по-голям от порядъка на уравнението на регресия. Така например за полином от първа степен, минималният брой нива на факторите е два.

Етапите за провеждане на експеримента са следните:

- избор на основните фактори и техните нива
- планиране и провеждане на експеримента
- определяне на коефициентите на уравнението на регресия
- статистически анализ на резултатите от експеримента

Таблица 1

Тип на плана	№ на опита	Фактори			
		x ₁	x ₂	x ₃	x ₄
2 ²	1	-1	-1	-1	-1
	2	+1	-1	-1	-1
	3	-1	+1	-1	-1
	4	+1	+1	-1	-1
2 ³	5	-1	-1	+1	-1
	6	+1	-1	+1	-1
	7	-1	+1	+1	-1
	8	+1	+1	+1	-1
2 ⁴	9	-1	-1	-1	+1
	10	+1	-1	-1	+1
	11	-1	+1	-1	+1
	12	+1	+1	-1	+1
	13	-1	-1	+1	+1
	14	+1	-1	+1	+1
	15	-1	+1	+1	+1
	16	+1	+1	+1	+1

Пълен факторен експеримент е експеримент при който се реализират всички възможни неповтарящи се комбинации на нивата на независимите фактори. Броят на опитите в този случай е $m=2^k$, където k е броя на факторите. В табл.1 са показани матриците 2², 2³ и 2⁴ за пълен факторен експеримент при две нива на факторите (+1 и -1). При построяването на тези матрици в първата колона знаците + и – се редуват през едно, във втората – през две, в третата през четири и т.н. Съществуват и други методи за построяване на матрицата.

В табл.2 е дадена разширена матрица на пълен факторен експеримент 2³ с която е възможно да се определят и ефектите от взаимодействие на факторите, което характеризира влиянието на даден фактор в зависимост от нивата на другите фактори. Знаците в стълбовете на взаимодействие се получават чрез умножение на съответните множители.

Таблица 2

	X ₁	X ₂	X ₃	X ₁ X ₂	X ₁ X ₃	X ₂ X ₃
1	+	+	+	+	+	+
2	-	+	+	-	-	+
3	+	-	+	-	+	-
4	-	-	+	+	-	-
5	+	+	-	+	-	-
6	-	+	-	-	+	-
7	+	-	-	-	-	+
8	-	-	-	+	+	+

Ако се разгледа частният случай, когато реакцията линейно зависи от три независими контролируеми и управляеми фактори, уравнението на регресия има вида:

$$Y = a_0 + \sum_{i=1}^3 a_i x_i + \sum_{i,u=1}^3 a_{iu} x_i x_u + a_{123} x_1 x_2 x_3$$

Планът за пълен факторен експеримент има вида:

Таблица 3

№ на опита	x ₀	x ₁	x ₂	x ₃	x ₁ x ₂	x ₁ x ₃	x ₂ x ₃	x ₁ x ₂ x ₃	Резултат
1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	y ₁
2	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	y ₂
3	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1	y ₃
4	+1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	-1	y ₄
5	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	y ₅
6	+1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	-1	y ₆
7	+1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	y ₇
8	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	y ₈

Тук е добавена колона на фиктивна променлива x₀, необходима за оценка на свободния член a₀ от уравнението на регресия. След реализиране на плана се получават осем уравнения с осем неизвестни, и от решаването на тези уравнения се намират всички осем коефициенти на уравнението на регресия. План в който броя на опитите е равен на броя на определяните коефициенти се нарича наситен.

Членовете в уравнението на регресия, съдържащи произведенията x₁ x₂; x₂ x₃ и т.н. отразяват двойните взаимодействия на факторите, а членовете x₁ x₂ x₃ – отразява тройно взаимодействие.

Коефициентите в уравнението на регресия се определят от зависимостите, посочени в т.7.

Непълнен (дробен) факторен експеримент

В много практически задачи взаимодействията от втори и висш порядък отсъстват или са пренебрежимо малки. Освен това, на първия етап от изследванията често е необходимо да се намери в първо приближение линейната апроксимация на изучаваната зависимост при минимален брой опити. Тогава например за три фактора уравнението на регресията има вида:

$$Y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$$

и трябва да се определят само четири коефициента. За това са достатъчни четири опита (докато при пълния факторен експеримент бяха необходими $2^k=8$ опита).

Матрицата при пълен факторен експеримент 2^2 позволява да се построи математическият модел:

$$Y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_{12}x_1x_2$$

Ако се приеме, че зависимостта на реакцията от двата фактора може да бъде описана с линеен модел, то е достатъчно да бъдат определени три коефициента – a_0 , a_1 и a_2 . При това ефекта на взаимодействие е незначителна величина, т.е. $a_{12} \rightarrow 0$. Това предположение позволява да се включи в схемата на експеримента нов фактор x_3 , на който се приписват нива, съответстващи на x_1x_2 , т.е. може да се счита, че $x_3=x_1x_2$. По такъв начин матрицата 2^2 позволява да се изследва влиянието на 3 фактора и полученият модел ще има вида:

$$Y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$$

Таблица 4

№ на опита	x_0	x_1	x_2	$x_3=x_1x_2$	Резултат
1	+1	-1	-1	+1	y_1
2	+1	+1	-1	-1	y_2
3	+1	-1	+1	-1	y_3
4	+1	+1	+1	+1	y_4

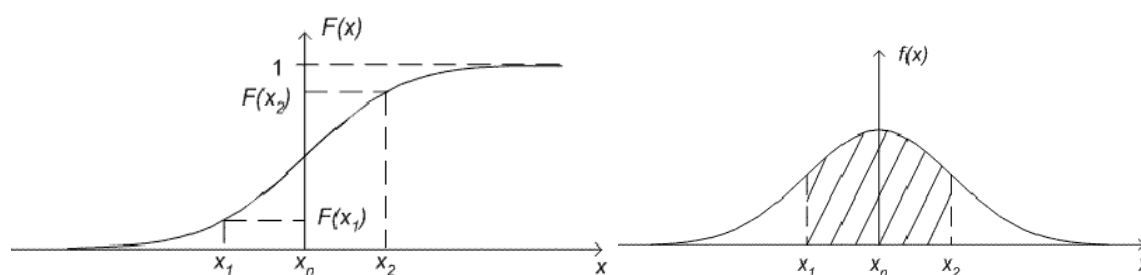
При построяването на такива планове в колоната на въведения нов фактор трябва да бъде това взаимодействие, което може да се пренебрегне.

Броят на опитите при дробен факторен експеримент е 2^{k-p} , където: k - броя на факторите; p – брой на факторите, приравнени към ефекти на взаимодействие. Тук не се използват всички възможни комбинации на нивата на факторите.

3. Кратки сведения от теория на вероятностите и математическата статистика

Доколкото поради влиянието на неконтролируемите фактори, реакцията е случайна величина, то при обработката на резултатите от експеримента широко се използва апарата на теорията на вероятностите и математическата статистика.

Свойствата на една случайна величина напълно се описват от закона на нейното разпределение – връзката между възможните стойности на случайната величина и съответстващите им вероятности. Използват се два начина за описване на разпределението на случайната величина : интегрална $F(x)$ – функция на разпределението и диференциална $f(x)$ – плътност на разпределението.



фиг.3

$$F(x) = P(x_i < x) ; \quad P(x_1 < x < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

$$f(x) = dF(x)/dx ; \quad P(x_1 < x < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$$

Важни параметри на разпределението, определящо случайната величина са нейното математическо очакване M (характеризиращо положението на центъра на групиране) и дисперсията σ^2 (характеризираща степента на разсейване). За непрекъснати случайни величини математическото очакване и дисперсията се определят от зависимостите:

$$M = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx, \quad \sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M)^2 f(x) dx$$

Освен математическото очакване за характеристики на положението на центъра на групиране може да се използват модата M_0 (стойност на случайната величина, съответстваща на локалния максимум на плътността на вероятността) и медианата M_e (стойност на случайната величина, за която функцията на разпределение приема стойност $1/2$, т.е медианата е такава стойност на случайната величина която дели наполовина площта под кривата на плътността на разпределението).

Дисперсията има размерност квадрата на единицата за измерване на случайната величина, затова често като характеристика на разсейването се използва средноквадратичното отклонение σ - квадратен корен от дисперсията.

Функцията на разпределение $F(x)$ и съответстващата ѝ плътност $f(x)$ представляват математически модел на свойствата на изследваната случайна величина (реакцията), стойностите на която се регистрират в хода на експеримента. Затова една от основните задачи на статистическата обработка на опитни данни е намирането на такава функция на разпределение, която от една страна достатъчно добре да описва наблюдаваните стойности на случайната величина, а от друга – да е удобна за понататъшен статистически анализ.

При обработка на експериментални данни най-често се оперира със случайни величини, които имат нормално (Гаусово) разпределение. Съгласно централната пределна теорема на математическата статистика ”при определении условия разпределението на n независими случайни величини с произволни разпределения, клони към нормалното разпределение когато $n \rightarrow \infty$.” Необходимите условия, при които тази теорема е справедлива са: отделните случайни величини имат крайна дисперсия и дисперсията на коя да е от тях не е много по-голяма в сравнение с дисперсиите на другите. При обработката на експериментални данни тази теорема има голямо значение, доколкото реакцията е случайна величина, формирана в резултат от влиянието на голям брой неконтролируеми фактори. Освен това, ако при провеждане на опита всички най-съществени фактори са контролируеми, то въздействието на всеки от неконтролируемите фактори не е много по-голямо от това на останалите неконтролируеми фактори, т.е. дисперсията (разсейването) на реакцията което предизвиква кой да е от неконтролируемите фактори не се отличава значително от дисперсията, свързана с влиянието на останалите неконтролируеми фактори. В противен случай факторът, чиято дисперсия съществено се отличава от другите трябва да бъде причислен към групата на контролируемите фактори.

Ако при планирането на експеримента са отчетени всички съществени фактори и при провеждане на опита те са включени в групата на контролируемите, то при обработката на опитните данни може да се предполага, че те не противоречат на нормалното разпределение.

4. Методи за измерване, оценка на точността, представяне и оценка на резултата

Провеждането на експерименти е свързано с измервания както на контролируемите фактори така и на реакцията, която се оценява по резултатите от преки или косвени измервания.

Измерването представлява процес на експерименталното получаване на информация за големината на величината. Измерването е съвкупност от операции извършвани за определяне на стойността на величината. Резултат от измерване е информация за големината на величината получена експериментално. Резултатът от измерването е стойност приписана на измерваната величина чрез измерване

Същността на измерването се състои в сравнение на големините на две величини: първата – измерваната, а втората – величина с известна големина. Операцията сравнение се извършва с помощта на средства за измерване. Под средство за измерване се разбира

Метод на измерване е общо описана логическа последователност от действия, използвана при извършване на измерването. Тясно свързани с термина метод са термините принцип и процедура на измерване. Принцип на измерване е явление, което служи за основа на измерването. Принципът може да е физическо, химическо или биологично явление. Например термоелектрическият ефект, използван при измерването на температура. Процедура на измерване е подробно описание на измерването в съответствие с един или няколко принципа на измерване и с дадения метод на измерване. Процедурата на измерване обикновено се описва в документ, който понякога се нарича “методика на измерването”. Обикновено тя е достатъчно подробна, за да може операторът да извърши дадено измерване без допълнителна информация.

Широко разпространение е намерила класификацията по начина на сравнението на измерваната величина с мерките.



По тази класификация методите за измерване се разделят на две групи:

- Макар и придобили гражданственост тези две наименования не са особено коректни. В основата на изследването лежи операцията сравнение. Следователно

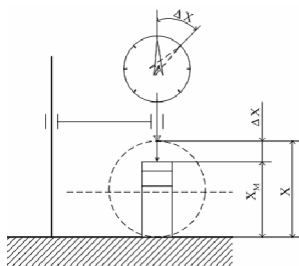
сравнението с мярка присъства при всяко измерване. Затова посочените две разновидности могат да се нарекат методи на опосредствено и непосредствено сравняване с мярка.

Същността на метода на непосредствена оценка (метода на опосредственото сравняване с мярка), се състои в това, че за стойността на измерваната величина се съди по показанията средства за измерване. В този случай сравняването с мярката е осъществено на предварителния етап на градуиране на средството за измерване. Това е най-разпространения метод на измерване, който се реализира от по-голямата част от средствата за измерване.

Отличителната черта на метода на сравняване с мярка е непосредственото участие на мярката в процеса на измерването. Такива са диференциалния метод, нулевия метод, метода на заместване и инкременталния метод (чрез броене).

При *диференциалния метод* измерваната величина X се сравнява с величината X_M възпроизвеждана от мярката, като за стойността на X се съди по измерената с помощта на средство за измерване разлика между тях ΔX .

$$X = X_M + \Delta X$$

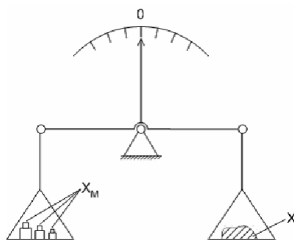


фиг.5

При *нулевият метод*, за разлика от диференциалния метод с помощта на изменяща се мярка се постига разлика между X и X_M близка до нула.

$$\Delta X = X - X_M \approx 0$$

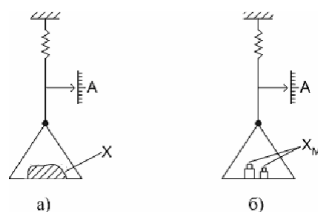
т.е. $X \approx X_M$



фиг.6

Методът на заместването се състои в това, че величината измервана със съответно измервателно средство се заменя с изменяща се мярка до постигане на аналогично показание

на средството за измерване. За стойността на измерваната величина X се съди по стойността на мярката т.е. $X=X_M$.



фиг.7

Например при измерване на маса първоначално се поставя измервания обект X и се запаметява показанието A . След това, обектът се сменя и на негово място се поставя набор от еталони X_M до постигане на същото показание A . Тогава масата на измервания обект е $X=X_M$.

Предимство на метода на заместването е възможността от използването на неградуирано средство за измерване, което играе ролята на компаратор, тъй като стойността на измерената величина се отчита по стойността на мярката.

Инкрементален метод (метод на измерване чрез преброяване) Подходящо избрана големина (инкремент), равна по големина на единицата за измерване или пропорционална на нея се наслагва директно върху измерваната големина. В резултат на това тя се разделя реално или условно на части равни на инкремента. Определянето на стойността се свежда до преброяването на частите, на които е разделена измерваната големина.

Реално разделяне е възможно при измерване на количество на флуиди или насипни материали. Условно разделяне на части се ползва например при часовници, като информацията за продължителността на даден интервал от време се получава като се преброяват периодите на осцилатора.

Грешки и неопределеност на измерването

Грешка на измерване е разликата между резултата от измерване $x_{изм}$ и истинската $x_{ист}$ стойност на измерваната величина. Тъй като истинската стойност по природа не може да бъде определена, на практика се използва действителната (приписаната) стойност – най добрата оценка на стойността на величината. Следователно, би могло да се говори за истинска грешка (непознаваема) и действителна грешка (познаваема).

$$\Delta = x_{изм} - x_{ист} .$$

Относителна грешка Δ^* е отношението на грешката на измерване и истинската стойност на измерваната величина.

За оценка на точността на измервателните средства се използва показателят **приведена грешка** Δ^o – отношението на грешката и горната граница на обхвата на показанията или интервала на измерване на измервателното средство (най-често, представяно като процент).

Класификация на грешките

Според проявлението на грешките при повтарящи се измервания, те могат да се разделят на систематични, случайни и груби.

□ *Систематичната грешка* има устойчив характер. Тя винаги съпровожда резултата от измерването с постоянна или закономерно променяща се стойност. Числено тя се определя като разлика между средноаритметичната стойност, която би се получила от безкраен брой измервания на една и съща величина, извършени при повтарящи се условия, и истинската стойност на тази величина. По принцип систематичната грешка може да бъде разпозната, определена и резултатът от измерването може да се коригира с нейната стойност.

□ *Случайната грешка* характеризира разсейването, т. е. повторемостта на резултата от единичното измерване. Числено тя се определя като разлика между резултата от измерване и средноаритметичната стойност, която би се получила при безкраен брой измервания на една и съща величина, извършени при повтарящи се условия.

Случайната грешка се дължи на съвместното влияние на различни случайни фактори и нейната стойност не може да бъде определена предварително. По статистически път може да се определи само вероятността за нейното появяване.

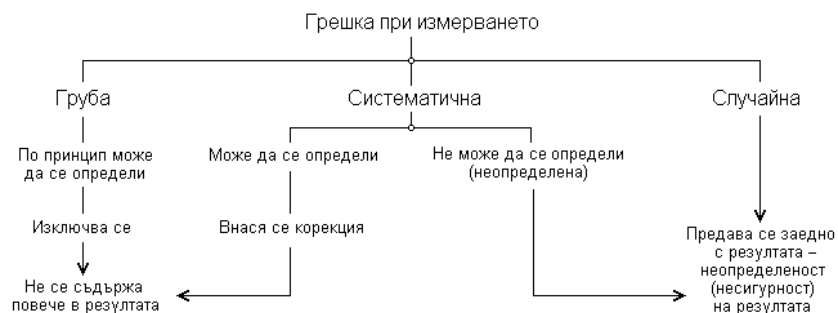
□ *Грубата грешка* е случайна грешка, чиято стойност рязко се отличава от обикновено появяващите се грешки. Тя относително лесно може да се разпознае.

Според възможността за корекция грешките могат да се разделят на

□ *Предотвратими*. Такива грешки (напр. в резултат от неподходящи условия или неправилно обслужване на измервателните средства) не следва да се допускат. При евентуално появяване те могат да се разпознаят и съответните резултати да не се вземат под внимание.

□ *Коригируеми*. Такава е главната част от систематичните грешки. Тези грешки следва по принцип да се изключат от резултата, освен в случай, че стойностите им са твърде малки в сравнение с другите грешки, или коригирането е много трудоемко. Тогава $x_{ист} = x_{изм} + \Delta_{попр}$. Тук $x_{ист}$ е коригираният (поправен) резултат, а установената стойност на поправката $\Delta_{попр}$ се прибавя към измерената (непоправена) стойност $x_{изм}$.

□ *Некоригируеми* са случайните грешки и такива части от систематичните грешки, които с разполагаемите възможности не могат да бъдат разпознати, или пък определянето им е неизгодно по финансови или организационни причини.



Фиг. 8

Според причината за тяхното появяване грешките могат да се разделят на:

- *Грешка, породена от принципа или метода* на измерване.
- *Грешка на показанието на измервателното средство* (измервателния уред). Тази грешка се дължи на несъвършенства в принципа на действие, конструкцията или изпълнението на уреда и обикновено се определя при зададени (стандартни условия).
- *Грешка, породена от влияещите величини* (фактори). Влиянието на фактори като външната среда (температура, хранящо напрежение, вибрации и пр.), момента на измерването, оператора и т. н. предизвиква допълнителни грешки, които често имат значителна големина в сравнение с грешката на показанието.

Изложеното показва колко е важно да се разбира и отчита разликата между грешката на показанието на измервателното средство и грешката на резултата от измерването.

Методи за коригиране на систематичните грешки

Внасянето на поправка в резултата от измерването на пръв поглед е лесно, но изучаването на систематичната грешка и определянето на големината ѝ често е сложна и трудоемка задача.

От една страна, нерядко систематичните грешки превишават по големина случайните. От друга – трудностите произтичат от това, че систематичните грешки не могат да се разглеждат обобщено, а изискват специално разглеждане за всяка конкретна измервателна задача.

Могат да се обобщят следните методи за откриване и компенсиране на систематичните грешки.

1. Сравняване на измерените стойности с познати “еталонни” стойности на измерваната величина. Като еталон може да се използва и проверен образец или измервателен уред. Евентуалните поправки на измерваните стойности се представят в таблица или графика.

За да бъде възможно такова сравняване, се поддържа система от еталони и съответни проверочни схеми, позволяващи сравнимост (проследимост) на резултата от измерването с първичния еталон.

2. Оценяване на отклоненията на фактическата функция на преобразуване при измерването $x_{изх} = f(x_{вх})$ спрямо зададената (оачкваната) функция.

Въз основа на оценените отклонения се формират и съответните поправки.

В тази група следва да се включат и случаите, когато поради характера на метода на измерване, могат да се получават симетрични и противоположни по знак отклонения на резултата от измерването, които взаимно могат да се компенсират.

Такъв случай е например грешката при измерване с кобилична везна поради отклонения на дължината на рамената й. Друг пример е грешката при измерване на стъпката на резба с инструментален микроскоп, когато оста на детайла е наклонена спрямо направлението на движение на масата.

3. Оценка на грешките, внасяни от влияещите величини.

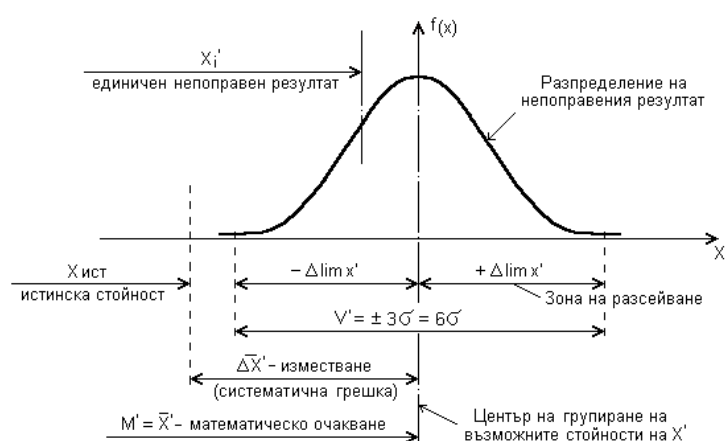
Въз основа на установените функционални връзки между тези величини (температура, налягане и пр.) от една страна и съответната грешка на измерване – от друга, се определят стойностите на поправките. Корекцията може да се въведе ръчно (с помощта на съответни таблици или графики) или автоматично, особено при наличие на микропроцесорно устройство в измервателната верига.

Представяне на случайните грешки

Както бе посочено по-горе, резултатът от измерването, респ. грешката на измерване се формира под влияние на различни систематични и случайни фактори.

При многократно измерване (n пъти) на една и съща величина, непоправените стойности на резултата от измерването x_i' се разпределят по нормалния закон (фиг. 9) с център на групиране:

$$M' = \bar{x}' = \frac{1}{n} \sum x_i'$$



Фиг.9 Разсейване на непоправения резултат от измерването

Зоната на разсейване V' на възможните стойности на непоправения резултат, при доверителна вероятност $P = 0,9973$ е:

$$V' = \pm 3(\sigma x)' = \pm \Delta_{lim} = 6(\sigma x)' \text{ или}$$

$$V' = \pm 3S(x') = \pm \Delta_{lim} = 6S(x)',$$

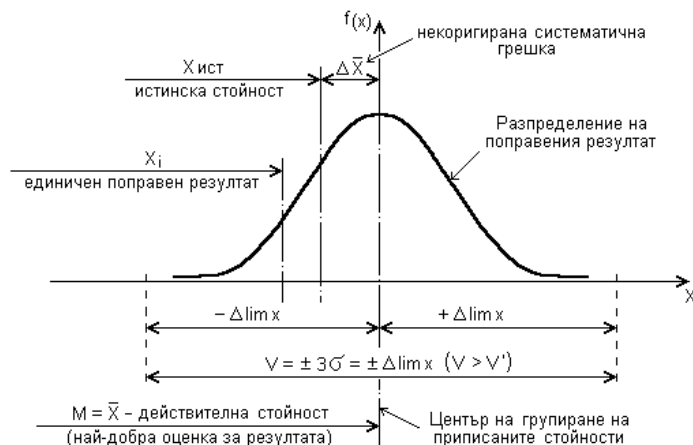
където $S(x')$ е оценката на средноквадратичното отклонение $\sigma(x')$, а

Δ_{lim} – граничната случайна грешка.

$$\sigma \approx S_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x'_i - \bar{x}')^2}.$$

Тук центърът на групиране е отместен спрямо истинската стойност $x_{ист}$ на измерваната величина с отместването $\Delta\bar{x}'$, което представлява систематичната грешка на измерването.

След разпознаване на систематичната грешка и определяне на големината ѝ, резултатът от измерването следва да бъде поправен. Разпределението на поправените стойности x_i добива вида, показан на фиг.10.



Фиг.10 Разсейване на поправения резултат от измерването

Приема се, че действителната стойност на резултата от измерване, т.е. неговата най-добра оценка, е равна на математическото очакване или сред-ноаритметичната стойност $M = \bar{x}$ на поправените резултати x_i от единичните измервания.

Действителната стойност на резултата се различава от истинската стойност на измерваната величина със стойността $\Delta\bar{x}$ на неразпознатата или некоригирана систематична грешка.

Зоната на разсейване V на възможните стойности x_i на поправения резултат в общия случай се различава от зоната на разсейване V' на непоправения резултат x'_i , тъй като поради непълното познаване на внесените поправки, неизучените систематични грешки се разглеждат като случайни въздействия (рандомизирани систематични грешки).

Трябва специално да се подчертае, че представените по-горе грешки – систематични или случайни, трябва да се разглеждат като конкретни стойности за съответното измерване.

Граничната грешка Δ_{lim} , респ. зоната на разсейване V , следва да се разглежда като интервал, в който грешката може да се появи с определена (доверителна) вероятност.

Неопределеност на резултата от измерване

Представянето на резултата от измерване чрез грешката на измерване е ефективно, когато е налице еталон, или друг източник, представящ с известна точност истинската стойност на измерваната величина, а с това – и възможност за оценка на грешката.

При липса на информация за истинската стойност на величината, нейната оценка в процеса на измерване може да бъде направена само с точност до големината на един интервал, в който с определена достоверност може да се очаква, че ще се появи истинската стойност – интервал на неопределеността на резултата.

В последните години международно бе утвърдената методика за оценяване на неопределеността на резултата от измерване. Тя създава възможност за прилагане на унифицирана процедура и достигане до единство при оценка на качеството на получения резултат.

Неопределеност (несигурност) на измерване е параметър, свързан с резултата от измерване, който характеризира дисперсията на стойностите, които могат да бъдат приписани на измерваната величина.

Такъв параметър може да бъде *средноквадратичната неопределеност* $u(x)$.

$$u(x) = S(x), \text{ респ. } \sigma(x).$$

Най-често резултатът се представя чрез *разширената неопределеност* $U(x)$ – полуширината на интервал, в който се преценява, че се намира истинската стойност на измерваната величина.

$$U(x) = k \cdot u(x).$$

Коефициентът k , се нарича коефициент на покриване. Обикновено $k = 2$.

Примери за представяне на резултата от измерване:

$$x = 5,75 \text{ mm} \quad U = 0,05, \quad k = 2;$$

$$x = 5.75 \pm U = 5.75 \pm 0.05 \text{ mm}, \quad k = 2.$$

В общия случай неопределеността на измерването обхваща много съставлящи. Тяхното определяне може да се направи по два пътя.

□ *Оценка тип А.* Съставлящите, респ. неопределеността се оценяват на базата на статистически анализ на резултатите от серии измервания и се характеризират от експерименталните средноквадратични отклонения.

□ *Оценка тип Б.* Средноквадратичната неопределеност се основава на цялата налична информация, получена от:

- данни от предишни измервания;
- опит и общи познания за съответното измерване и измервателно средство;

- сертификати, справочни данни, спецификации на производителите и т.н.

Сумарна грешка и неопределеност на резултата от измерване (съставяне на бюджет на неопределеността)

Сумарната грешка на резултата от измерване включва компонентите на грешката, генерирани от различните фактори при измерването. По-важните от тях са:

Основна грешка на измервателното средство. Това е грешката на показанието, получена при нормирани условия.

Грешки, предизвикани от влияещите фактори, в т.ч.:

- От настройката на ИС, вкл. от настроените мерки;
- От температурата, влажността, налягането;
- От захранващото напрежение, осветеността и пр.;
- От измервателния натиск;
- От ориентацията на детайла и ИС;
- От отклоненията на формата на детайла, грапавостта и т.н.;
- Субективни грешки.

На практика, всяка от компонентите на грешката има и систематична и случайна съставка и може да се представи с разпределението, показано на фиг.9.

Естествено, за разпознатите и оценени систематични грешки трябва да се направи корекция на резултата, поради което по-нататък следва да се разглеждат само случайните и рандомизирани систематични грешки, представени чрез граничните грешки (вж фиг.10), предизвикани от отделните фактори.

Сумарната граничната грешка се получава въз основа на теоремата за сумиране на дисперсиите:

$$\Delta_{\text{lim}\Sigma} = \pm \sqrt{\sum \Delta_{\text{lim}(j)}^2},$$

където $\Delta_{\text{lim}(j)}$ са граничните грешки, предизвикани от отделните фактори.

Комбинираната (сумарната) средноквадратична неопределеност $u_c(y)$ на резултата от измерване, когато този резултат е получен в резултат на влиянието на определен брой други величини, е равна на положителния квадратен корен на сумата от дисперсиите на тези величини, претеглени с коефициентите на влияние на тези величини.

При взаимнонезависими (некорелирани) входни величини

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_1^N u_j^2(y)}$$

Величината $u_j(y)$ ($j = 1 \dots N$) е приносът на средноквадратичната неопределеност на входната величина x_j в средноквадратичната неопределеност на резултата от измерването

$$u_j(y) = C_j \cdot u(x_j),$$

където C_j е коефициентът на влияние.

В общия случай интервалът, характеризиращ неопределеността не е идентичен на доверителен интервал, свързан с известна доверителна вероятност, особено при включването и на рандомизирани систематични компоненти на грешката.

Бюджет на неопределеността е обобщено представяне на оценяването на съставлящите на неопределеността на резултата от измерването. Бюджетът включва списък на всички източници на неопределеност, свързаната с тях средноквадратична неопределеност и методите за нейното оценяване.

Грешка и неопределеност на резултата от косвени измервания

При косвени измервания търсената величина се определя след измерване на други величини, въз основа на известна функционалната връзка между търсената и входните величини, т.е. $y = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$.

Ако с $\Delta(y)$, съответно $\Delta(x_j)$, означим систематичните грешки или поправките на търсената и входните величини, връзката между тях, след разлагане в ред на Тейлор и прости преобразувания се определя от уравнението

$$\Delta(y) = \sum_1^N \frac{\partial y}{\partial x_j} \Delta x_j.$$

Тук частните производни представляват коефициентите на влияние на величините

$$x_j. \quad C_j = \frac{\partial y}{\partial x_j}, \quad (j = 1, 2, \dots, N).$$

Въз основа на теоремата за сумиране на дисперсиите за комбинираната неопределеност се получава:

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_1^N \left(\frac{\partial y}{\partial x_j} \right)^2 u^2(x_j)}.$$

Разширената комбинирана неопределеност ще бъде:

$$U_c(y) = k \cdot u_c(y).$$

Груби грешки при измерването

Грубите грешки представляват особен вид случайни грешки. Груба е грешката на резултат от отделно измерване, част от ред от измервания, която при дадените условия рязко се отличава от останалите резултати. Източници на груба грешка са обикновено резките изменения на условията на измерване (механични удари, вибрации, колебания на околната среда, скокове в захранващото напрежение и др.) или неправилни действия на

оператора (неправилно отчитане на показанията на средствата за измерване, неправилен запис на резултата др.)

Грубите грешки възникват като правило при еднократно измерване и обикновено се откриват и отстраняват при многократни измервания.

Коректна статистическа обработка на дадена извадка от данни е възможна само когато тя е еднородна т.е. когато всички нейни членове принадлежат на една и съща генерална съвкупност. При това е възможно част от членовете на дадена извадка да принадлежат на друга генерална съвкупност и да не се отличават съществено от членовете на първата, което прави изключително трудно идентификацията на двете съвкупности.

Наличието на аномални отчети се нарича *замърсяване на извадката*, а отстраняването от нея на силно отличаващите се по стойност от центъра на гупиране стойности – *цензуриране на извадката*.

Установяването на наличие на груба грешка Δu_i в резултата от наблюдението и решението за неговото изключване се осъществява по специални статистически критерии чрез статистическа проверка на хипотези.

Критерии за изключване на грубите грешки

За откриване и изключване на грубите грешки при многократни измервания се използват статистически критерии, при предварително приет закон на разпределение на резултатите от измерването.

Използват се общите методи за проверка на статистически хипотези. Проверяваната хипотеза H_0 , обикновено се състои в твърдението, че конкретният резултат u_i не съдържа груби грешки. Ако хипотезата бъде отхвърлена резултатът от измерването се приема за съдържащ груба грешка и се изключва от обработваната извадка.

При проверка се задава вероятността β (нивото на значимост) за това че съмнителният резултат, за който се предполага че съдържа груба грешка, може действително да е част от разглежданата съвкупност от резултати от измерване т.е. да не съдържа груба грешка.

- Критерий на Райт

Резултатът от измерването u_i не принадлежи на разпределението на разглежданата съвкупност от резултати (т.е. той съдържа груба грешка) със зададена вероятност, ако

$$|y_i - \bar{y}| > z \cdot s$$

където z е аргумент във функцията на Лаплас.

Или с други думи резултатът от измерването u_i може да се счита за съдържащ груба грешка, ако се намира извън границите на цензуриране.

$$\bar{y} \pm z s.$$

При нормално разпределение обикновено се приема $\gamma=0,9973$, при което $z=3$, затова критерият на Райт е известен под наименованието “критерии на трите сигма”. Вероятността

β “нормален” резултат да излезе извън тези граници е много малка $\beta=1-\gamma=0,0027$. Някои автори считат че границите $\pm 3\sigma$ са твърде тесни и формулират критерия на Райт по следния начин:

Ако е изпълнено условието

$$|y_i - \bar{y}| > 4s$$

резултат y_i сигурно съдържа груба грешка, а ако

$$3s < |y_i - \bar{y}| < 4s$$

може да се предполага наличието на груба грешка.

Средната стойност на y и s се изчисляват без отчитане на екстремната стойност y_i .

Основен недостатък на критерия на Райт е това, че той е справедлив при брой наблюдения $n > 20-30$.

- *Критерий на Романовски*

Критерият на Романовски се използва, когато броят на измерванията $n < 20$. Според този критерий, резултат y_i съдържа груба грешка ако:

$$|y_i - \bar{y}| > t'_\beta \cdot s$$

Множителят t'_β е модифициран аргумент на функцията на Стюdent.

$$t'_\beta = t_\beta \sqrt{\frac{n+1}{n}}$$

Индексът β е ниво на значимост т.е. риск, за това че при определена стойност на t'_β , обикновените случайни грешки могат да бъдат признати за груби или че ако е изпълнено горното условие, грешката е груба с доверителна вероятност γ .

Критичната стойност при различни нива на значимост β и обем на извадката n са дадени в приложение.

Оценка на реакцията

Реакцията се оценява по резултатите от преки или косвени измервания. Начина на оценка зависи от това дали реакцията е случайна или неслучайна величина и от точността на измерване. Основна задача в случая е получаването на обоснован извод за действителните стойности на реакцията с отчитане на грешката на измерване при ограничен брой измервания.

Възможни са следните подходи при оценката на реакцията:

- Реакцията е неслучайна величина и грешките на измерване са малки в сравнение със стойността на реакцията.

$$Y = y_i + \Delta_i$$

където Y е истинската стойност на реакцията, y_i – измерената стойност, Δ_i – грешката на измерване.

Ако $\Delta_i < (0,01 \dots 0,02)y_i$, то грешката на измерване може да се пренебрегне и за действителна стойност да се приеме y_i .

- Реакцията е неслучайна величина, но грешката на измерване не може да се пренебрегне. За намаляване на влиянието на грешката на измерване се извършват многократни измервания на реакцията при еднакви условия. Точкова оценка на истинската стойност на реакцията ще бъде средноаритметичната стойност на резултатите от паралелните измервания.

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum y_i, \text{ където } n \text{ е броят на паралелните измервания}$$

Точността на оценката е толкова по-висока, колкото по-голям е броят на паралелните измервания. При относително неголям брой измервания е целесъобразно да се използва интервална оценка на реакцията

$$\bar{y} - t(\alpha, n)s_y < Y < \bar{y} + t(\alpha, n)s_y$$

където $s_y = \frac{s}{\sqrt{n}}$, а $t(\alpha, n)$ – критерий на Студент, s – оценка на средноквадратичното отклонение.

Горното неравенство може да се представи и във вида:

$$|Y - \bar{y}| < t(\alpha, n) \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Задавайки доверителен интервал или допустима грешка на оценката Δ_o може да се определи необходимия брой паралелни измервания

$$n > t^2(\alpha, n) \frac{s^2}{\Delta_o^2}$$

Ако стойността на s предварително не е известна, то първоначално се провеждат серия паралелни опита n_1 , които позволяват да се оцени s^2 . След това се изчислява n_2 , като при определянето на критерия на Студент $t(\alpha, n_1)$ се приема $n=n_1$. При $n_2 \gg n_1$ се провеждат допълнителни $n_2 - n_1$ опита за уточняване на s^2 и за изчисляване на n_3 . Ако $n_3 < n_2$ се приема $n=n_2$.

- Реакцията е случайна величина, а размаха на грешката на измерване е пренебрежимо малка в сравнение със зоната на разсейване на стойностите на реакцията. В този случай реакцията се оценява чрез характеристиките на положението и на разсейването на закона на разпределение – средноаритметична стойност и средноквадратично отклонение.

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum y_i, \quad s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (y_i - \bar{y})^2}$$

- Реакцията е случайна величина, а грешките на измерване не могат да се пренебрегнат.

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum y_i$$

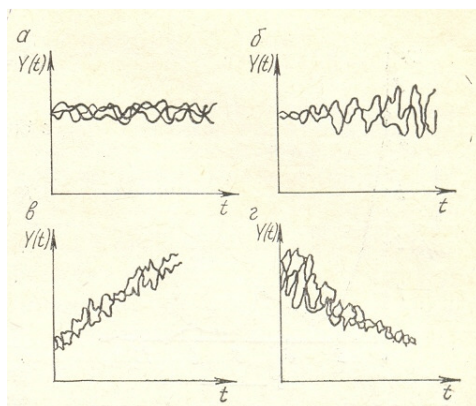
Доколкото грешката на измерване и реакцията са независими случайни величини, то оценката на средноквадратичното отклонение е

$$s = \sqrt{s_p^2 + s_u^2}$$

където s_p – оценка на средноквадратичното отклонение получено от обработка на резултатите от серия измервания, s_u – оценка на средноквадратичното отклонение на грешката на измерване. За определяне на s_u се провежда допълнителен експеримент.

- Реакцията е случайна функция $Y(t)$, където аргументът t може да бъде непрекъсната (например време) или дискретна величина (например пореден номер на обработван детайл). За разлика от случайните извадки в този случай редът на измерванията е съществен за разкриване на причините и механизма, определящ свойствата на реакцията. Получената експериментално последователност от стойности $Y(t)$ се нарича реализация на случайния процес.

Случайната функция $Y(t)$ може да бъде стационарна или нестационарна. Характеристиките на стационарните случайни функции зависят само от взаимното разположение на стойностите на аргумента, а не от самите стойности. При нестационарните случайни функции при изменение на аргумента се променя разсейването на стойностите $Y(t)$, положението на центъра на групиране или и двете характеристики.



фиг.11 - а) стационарен б,в,г) нестационарен

При наличие на множество реализации на случайната функция съвкупността от стойности при фиксирана стойност на аргумента образува множество случайни величини, числени характеристики на които са математическото очакване $M[Y(t)]$ и дисперсия $D[Y(t)]$. За стационарни случайни процеси $M[Y(t)] = \text{const}$ и $D[Y(t)] = \text{const}$. Връзката между

стойностите на случайната функция при различни стойности на аргумента се характеризира от корелационната функция.

$$K(t_1, t_2) = M\{(Y(t_1) - M[Y(t_1)])\{Y(t_2) - M[Y(t_2)]\}$$

При анализа на случайни функции обикновено се приема предположението за ергодичност на процеса, което позволява да се оценяват извадковите характеристики на случайната функция по една реализация и за оценка на математическото очакване се използва средната стойност, за оценка на разсейването - средноквадратичното отклонение, а за оценка на корелационната функция:

$$K(\tau) = \frac{1}{n} \sum (Y_i - \bar{Y})(Y_{i+\tau} - \bar{Y}), \quad \tau = 1, 2, \dots, n$$

По-често се използва нормираната корелационна функция $r(\tau) = K(\tau)/s^2$.

5. Предварителна обработка на експериментални данни (Математическо осигуряване на експеримента)

Предварителната обработка на резултатите от измерване и наблюдение е необходима за да може при намирането на емпиричната зависимост, с най-голяма ефективност да се използват статистически методи и коректно да се анализират получените резултати.

При предварителната обработка на резултатите най-напред е необходимо да се разпознаят (открият) и отхвърлят грубите грешки на измерване и да се направи оценка на достоверността на резултатите от измерване. Друг важен момент от предварителната обработка на данните е проверката за съответствие на резултатите от измерване на нормалния закон и определяне на параметрите на това емпирично разпределение. Ако хипотезата за това, че данните не противоречат на нормалното разпределение, се окаже неприемлива, то следва да се определи на какъв закон на разпределение се подчиняват опитните данни, или ако е възможно да се преобразува опитното разпределение към нормално разпределение.

5.1. Определяне на параметрите на емпиричното разпределение

Точково оценяване

Числените характеристики на функцията на разпределение, получени в резултат от наблюдение на извадка се наричат *статистически (извадкови) характеристики*. Те се явяват оценки (статистически оценки, емпирични оценки) на числените характеристики M и σ на съвкупността N . За оценка на положението на центъра на групиране се използват извадковите характеристики средноаритметична стойност, медиана, мода, а за оценка на разсейването се използват извадковите характеристики извадкова дисперсия s^2 , средноквадратично отклонение s и размах R :

Средноаритметична стойност $\bar{X}$ (извадково средно) – характеризира положението на центъра на групиране, т.е. дава представа за това около коя стойност са съсредоточени стойностите на наблюдаваната количествена променлива и се определя като средноаритметичната стойност на всички индивидуални стойности в извадката:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Например ако са получени следните числени данни от извадка : 8; 6; 2; 3; 5, средноаритметичната стойност ще бъде: $\bar{X} = (8+6+2+3+5)/5 = 4,8$.

Средноаритметичната стойност $\bar{X}$ се явява оценка на математическото очакване М на генералната съвкупност N.

Понякога данните са от такъв характер, че всяко отделно наблюдение има различна степен на важност. В такъв случай се използва претеглено средно:

$$\bar{X} = \frac{\sum w_i x_i}{\sum w_i},$$

където w_i е предварително зададено “тегло”, съответстващо на значимостта на наблюдението. Ако се обработват групирани данни за “тегло” може да се приеме съответният брой наблюдения, попадащи в даден интервал на честотното разпределение, т.е. $w_i = v_i$ и $\bar{X}$ се определя по зависимостта:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m x_{im} v_i,$$

където m е броят на интервалите, а x_{im} - средните стойности на интервалите.

Средногеометрична стойност

$$\bar{G} = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$

Средногеометричната стойност е предпочитана средна мярка за определяне на средния темп на нарастване на количествена променлива при изследване на нейното изменение във времето.

Медиана $\tilde{X}$

Медианата е стойността на случайната величина, при която площта под кривата на закона на разпределение се разделя на две равни части. За определяне на медианата числените данни от извадката с обем n се подреждат по възходящ ред и се определя намиращата се в средата на реда стойност.

Например ако са получени следните числени данни от извадка : 8; 6; 2; 3; 5, след подреждането им във възходящ ред: 2; 3; 5; 6; 8, намиращата се в средата на реда стойност

е 5, т.е. $\bar{X}=5$. При нечетен брой се определя средноаритметичното на двете намиращи се в средата на възходящия ред стойности.

Мода M_o – това е стойността на най-често срещаното наблюдение в извадката.

За оценка на разсейването най-често се използват извадковите характеристики дисперсия s^2 , средноквадратично отклонение s и размах R :

Извадкова дисперсия s^2

Дефинира се по следния начин:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2$$

и се използва за оценка на дисперсията σ^2 на генералната съвкупност N .

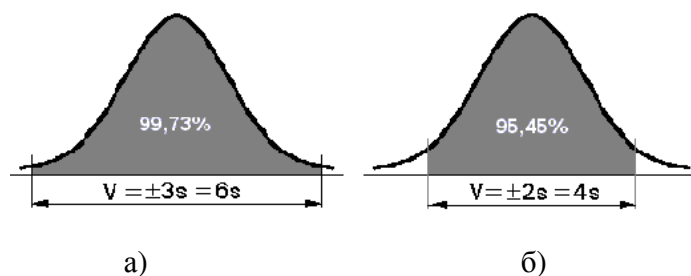
Средноквадратично отклонение s - характеризира разсейването на индивидуалните стойности около средноаритметичната стойност и е оценка на средноквадратичното отклонение на генералната съвкупност N :

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2}$$

Размах R - разликата между най-голямата и най-малката стойности, получени в извадката.

$$R = x_{\max} - x_{\min}.$$

Размахът е ефективна характеристика на разсейването при малки извадки.



фиг.12 Зони на разсейване

Зона на разсейване $V = \pm u s$ - област в която попадат определена част от стойностите на наблюдаваната величина. Множителят u зависи от вида на разпределението и приетата доверителна вероятност (вероятността за появата на събитие, което може да се счита за практически достоверно). Така например при нормален закон на разпределение в зоната $V=3s=6s$ ($u=3$) се съдържат 99,73% от всички стойности (фиг.12а), в зоната $V=2s=4s$ се съдържат 95,45% от всички стойности (фиг.12б). За целите на статистическия контрол

доверителната вероятност се приема най-често $P=0,9973$, т.е. зоната на разсейване е $V=3s=6s$ (при нормално разпределение).

На практика често се срещат разпределения на случайната величина близки до нормалното разпределение, които се характеризират с параметрите коефициент на асиметрия и ексцес.

Коефициентът на асиметрия A характеризира несиметрията на кривата на разпределение спрямо центъра на групиране:

$$A=3(\bar{X}-\bar{X})/s$$

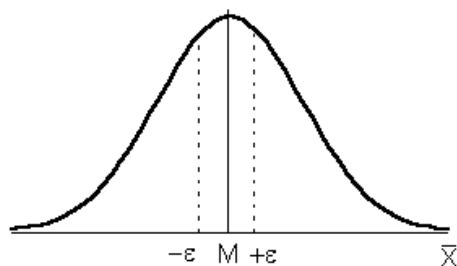
Коефициентът на асиметрия помага за избора на по-устойчивата средна мярка за положението. Например при наличието на твърде големи или твърде малки стойности в сравнение с всички останали в извадката, медианата се влияе по-слабо и затова в такива случаи е предпочитана средна мярка.

Коефициент на ексцес E – характеризира остротата на върха на кривата на разпределение:

$$E = \frac{\sum (x_i - \bar{X})^4}{ns^4} - 3$$

Интервално оценяване

Ако от една съвкупност се направят няколко извадки и се определят характеристиките на разпределението им ще се установи, че те не са еднакви, т.е. и техните стойности се разсейват. Отстраняването на тази неопределеност е невъзможно. Разсейването може да бъде намалено с увеличаване на обема на извадките, но това е икономически неизгодно. Затова се преминава към *интервална оценка* на характеристиките на разпределението. Интервалната оценка представлява интервал от числената ос, за който се предполага че съдържа с определена вероятност истинската стойност на оценяваната характеристика на разпределението. Особено голямо значение за практиката има разсейването на характеристиките на положението $\bar{X}$ и $\bar{X}$. Средноаритметичните стойности $\bar{X}_i$ при неограничен брой извадки имат нормално разпределение с математическо очакване M и дисперсия σ^2 (фиг.13).



фиг. 13. Доверителен интервал на математическото очакване

Доверителните граници на математическото очакване при нормално разпределение се определят от зависимостта:

$$\pm \varepsilon = \pm t_{\gamma k} s_{\bar{X}},$$

т.е. математическото очакване M се намира в доверителния интервал:

$$(\bar{X} - t_{\gamma k} s_{\bar{X}}) < M < (\bar{X} + t_{\gamma k} s_{\bar{X}}),$$

където $t_{\gamma k}$ е статистика на Стюдент, чиято стойност се определя от таблици (БДС 11316) или с помощта на функцията на Excel $TINV(\alpha, k)$ в зависимост от доверителната вероятност γ и броя на степените на свобода $k=n-1$, а $s_{\bar{X}}$ е средноквадратичното отклонение на средноаритметичните стойности $\bar{X}$:

$$s_{\bar{X}} = \frac{s}{\sqrt{n}}.$$

Ако законът на разпределение на случайната величина не е известен, доверителните граници са $\varepsilon = t s_{\bar{X}}$, където t е величина, която при зададена доверителна вероятност може да се определи от неравенството $\gamma > 1 - 1/t^2$.

Средноквадратичното отклонение на медианата може да се определи от формулата:

$$s_{\tilde{X}} = \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \cdot s.$$

Разпределението на средните стойности на извадките служи за определяне на центъра на групиране на генералната съвкупност (партидата) и при изследване на технологични процеси характеризира тяхната настроеност.

5.2. Статистическа проверка на хипотези

Статистическата хипотеза представлява твърдение за едно или друго свойство на разпределението на изследваната случайна величина.

Проверката на хипотеза е статистическа процедура със зададено ниво на риска (ниво на значимост α или доверителна вероятност $\gamma=1-\alpha$) за определяне на съвместимостта на съвкупност от данни с определено твърдение относно разпределението или стойността на някой от параметрите на разпределението.

Процедурата за проверка на хипотеза включва оценяване на доказателството за вземане на решение за отхвърляне или не на твърдението.

Статистическите хипотези биват: нулева, алтернативна, насочени, ненасочени, параметрични, непараметрични.

Нулева хипотеза H_0 - хипотезата, която се проверява. Например това е хипотеза, че няма различие $X_1 - X_2 = 0$, където X_1 и X_2 са съпоставяните стойности на признака.

Ако дадена хипотеза не е вярна, то трябва да съществува друга противоположна – алтернативна хипотеза H_1 .

Насочени хипотези $H_0 : X_1$ не превишава X_2

$$H_1 : X_1 \text{ превишава } X_2$$

Ненасочени хипотези $H_0 : X_1$ не се отличава от X_2

$$H_1 : X_1 \text{ се отличава } X_2$$

Когато е зададен вида на разпределението и се формулират хипотези за неговите параметри – хипотезите се наричат параметрични. Например хипотезата: нормално разпределена съвкупност има математическо очакване равно на M .

Когато не е зададен вида на разпределението - хипотезите са непараметрични. Например хипотезата: разпределението на съвкупността е нормално.

Проверката на хипотези се извършва с помощта на критерии за статистическа оценка. Издигнатата нулева хипотеза се проверява чрез специално подбрана случайна величина, разпределението на която е известно. Тази случайна величина се нарича статистически критерий.

Неправилното отхвърляне на вярна нулева хипотеза се нарича грешка от I род. Вероятността за допускане на грешка от I род е α . Неправилното приемане на грешна нулева хипотеза се нарича грешка от II род. Вероятността за допускане на грешка от II род е $\beta = 1 - \alpha$.

Проверка на хипотезата за равенство на математическото очакване на зададена стойност

Предполага се, че наблюдаваната случайна величина има нормално разпределение, направените наблюдения са независими и имат еднаква дисперсия.

Ако с M се означава математическото очакване на случайната величина, а с M_0 – зададената стойност, възможни са следните хипотези:

- двустранен критерий - $H_0: M = M_0; H_1: M \neq M_0$

- едностранен критерий - $H_0: M \leq M_0; H_1: M > M_0$

- едностранен критерий - $H_0: M \geq M_0; H_1: M < M_0$

Проверката се извършва по различен начин, когато е известна дисперсията σ^2 и когато е известна само нейната оценка s^2 .

Дисперсията σ^2 е известна

- изчисляват се величините:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum x_i \quad U = \frac{(\bar{X} - M_0) \sqrt{n}}{\sigma}$$

- по таблицата за интеграла на Лаплас или с функцията NORMSDIST се намира такава критична стойност $u_{кр}$ за която

$\Phi(u_{кр})=1-\alpha/2$ за двустранен критерий

$\Phi(u_{кр})=1-\alpha$ за едностранен критерий

- проверката се изпълнява по следните правила:

двустранен критерий – ако $|U| < u_{кр}$ H_0 може да се приеме

ако $|U| > u_{кр}$ H_0 се отхвърля

едностранен критерий с алтернатива $H_1: M > M_0$ - ако $U < u_{кр}$ H_0 не се отхвърля

ако $U > u_{кр}$ приема се алтернативата

едностранен критерий с алтернатива $H_1: M < M_0$ - ако $U > -u_{кр}$ H_0 не се отхвърля

ако $U < -u_{кр}$ приема се алтернативата

Дисперсията σ^2 е неизвестна

- изчисляват се величините:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{X})^2 \quad \text{и} \quad T = \frac{(\bar{X} - M_0) \sqrt{n}}{s}$$

величината T има разпределение на Стюдент с $\nu=n-1$ степени на свобода

- от таблиците на разпределението на Стюдент или с функцията $TINV$ се определя $t(\nu, \alpha/2)$ за двустранен критерий или $t(\nu, \alpha)$ – за едностранен критерий

- проверката на хипотезата се изпълнява по следните правила:

двустранен критерий – ако $|T| < t(\nu, \alpha/2)$ H_0 не се отхвърля (може да се приеме)

едностранен критерий с алтернатива $H_1: M > M_0$ - ако $T < t(\nu, \alpha)$ H_0 не се отхвърля

едностранен критерий с алтернатива $H_1: M < M_0$ - ако $T > -t(\nu, \alpha)$ H_0 не се отхвърля

Когато броят на наблюденията е голям ($n > 30$), разпределението на Стюдент се стреми към нормалното разпределение и дори да дисперсията да се оценява чрез s^2 може да се приложат правилата за известна дисперсия – да се прилага U -критерия.

Критерия на Стюдент за проверка на хипотези се смята за относително устойчив към нарушение на предпоставката за нормалност, тъй като t -разпределението асимптотично се стреми към нормалното при $n \rightarrow \infty$. Поради това дори разпределението да се отличава от нормалното, ако n е голямо величината T е асимптотично нормална и критерия на Стюдент е приложим.

Проверка на хипотезата за равенство на две математически очаквания

Прилага се за решаване на една от следните задачи:

- да се провери различават ли се средните стойности на две случайни величини
- да се провери дали средната стойност на една от две случайни величини е по-голяма от средната стойност на другата

Дисперсиите на двете извадки σ_1^2 и σ_2^2 могат да бъдат известни или да се определят експериментално чрез оценките s_1^2 и s_2^2 . В зависимост от това се използват различни правила за проверка на хипотезата.

Възможни са следните хипотези:

- двустранен критерий - $H_0: M_1 = M_2$; $H_1: M_1 \neq M_2$

- едностранен критерий - $H_0: M_1 \leq M_2$; $H_1: M_1 > M_2$

- едностранен критерий - $H_0: M_1 \geq M_2$; $H_1: M_1 < M_2$

Дисперсиите са известни:

- Изчислява се величината

$$U = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

- По таблицата за интеграла на Лаплас или с функцията NORMSDIST се намира такава критична стойност $u_{кр}$ за която

$\Phi(u_{кр}) = 1 - \alpha/2$ за двустранен критерий

$\Phi(u_{кр}) = 1 - \alpha$ за едностранен критерий

- Проверката се изпълнява по следните правила:

двустранен критерий – ако $|U| < u_{кр}$ H_0 не се отхвърля

едностранен критерий с алтернатива $H_1: M_1 > M_2$ - ако $U < u_{кр}$ H_0 не се отхвърля

едностранен критерий с алтернатива $H_1: M_1 < M_2$ - ако $U > -u_{кр}$ H_0 не се отхвърля

Дисперсиите са неизвестни, но са равни:

Например може да се смята, че дисперсиите на две извадки са еднакви, ако се сравняват две партии от продукция, произведена при еднакви условия – еднаква технология и оборудване. Ако съществува колебание относно равенство на дисперсиите, първо трябва да се провери хипотезата за равенство на дисперсиите.

- Изчисляват се оценките на дисперсиите s_1^2 и s_2^2 .
- Използва се разпределението на Стюдент (t-критерия) с $\nu = n_1 + n_2 - 2$ степени на свобода и се изчислява величината T

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}} \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}}$$

- от таблиците на разпределението на Стюдент или с функцията TINV се определя $t(\nu, \alpha/2)$ за двустранен критерий или $t(\nu, \alpha)$ – за едностранен критерий

- проверката на хипотезата се изпълнява по следните правила:

двустранен критерий – ако $|T| < t(\nu, \alpha/2)$ H_0 не се отхвърля

едностранен критерий с алтернатива $H_1: M_1 > M_2$ - ако $T < t(\nu, \alpha)$ H_0 не се отхвърля

едностранен критерий с алтернатива $H_1: M_1 < M_2$ - ако $T > -t(\nu, \alpha)$ H_0 не се отхвърля

Пример: При еднакви условия са обработени с райбер по 25 отвора с диаметри 6 и 10mm. Резултатите от измерване са показали, че срената стойност на разбиването на отворите (разликата между диаметъра на отвора и на райбера) са съответно: за райбер 6 – 10,9 μm , а за райбер 10 – 9,8 μm . Оценките на дисперсиите в двата случая са съответно $s_1^2 = 3,8 \mu\text{m}^2$; $s_2^2 = 4,76 \mu\text{m}^2$. Необходимо е да се провери влияние ли диаметъра на райбера върху разбиването на отворите.

Издига се нулева хипотеза $H_0: M_1 = M_2$, т.е. стойностите 10,9 и 9,8 са равни (не се различават съществено и разликите не се дължат на различните диаметри на инструмента).

Използваме t-критерия

$$T = \frac{10,9 - 9,8}{\sqrt{(25-1)3,8 + (25-1)4,76}} \sqrt{\frac{25 \cdot 25(25 + 25 - 2)}{25 + 25}} = 1,88$$

$T_{кр} = t(48; 0,05) = 2,01$ при доверителна вероятност 0,95

Тъй като $T < T_{кр}$ то нулевата хипотеза няма основание да се отхвърли и може да се счита че размерът 6 или 10mm не оказва съществено влияние на разбиването на диаметъра на отвора.

Проверка на хипотезата за равенство на дисперсията на зададена стойност

Дисперсията е мярка за разсейването на стойностите на случайната величина около нейната средна стойност. Описваната проверка се извършва, когато е необходимо това разсейване да не надхвърля определена стойност. Така може да се прави проверка на уреди, машини, устойчивост на технологични процеси.

Ако със σ^2 се обозначи дисперсията на случайната величина, а с σ_0^2 – зададената стойност, възможни са следните хипотези:

- двустранен критерий - $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$; $H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$
- едностранен критерий - $H_0: \sigma^2 \leq \sigma_0^2$; $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$
- едностранен критерий - $H_0: \sigma^2 \geq \sigma_0^2$; $H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$

Изчисляват се $\bar{X}$ и s^2

Величината $\chi^2 = (n-1)s^2 / \sigma_0^2$ има χ^2 разпределение с брой на степените на свобода $\nu = n-1$.

- От таблиците на χ^2 разпределението или с функцията CHINV се определят стойностите $\chi^2(\nu, \alpha/2)$ и $\chi^2(\nu, 1-\alpha/2)$ за двустранен критерий. За едностранен критерий с алтернативна хипотеза $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$ се определя стойността $\chi^2(\nu, \alpha)$, а за едностранен критерий с алтернативна хипотеза $H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$ - $\chi^2(\nu, 1-\alpha)$.

- Проверката се извършва по следните правила:

Двустранен критерий: нулевата хипотеза не се отхвърля ако е изпълнено неравенството

$$\frac{\nu s^2}{\chi^2(\nu, \alpha/2)} \leq \sigma_0^2 \leq \frac{\nu s^2}{\chi^2(\nu, 1-\alpha/2)}$$

и се отхвърля в противен случай.

Едностранен критерий - $H_0: \sigma^2 \leq \sigma_0^2$; $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$: нулевата хипотеза не се отхвърля ако

$$\frac{\nu s^2}{\chi^2(\nu, \alpha)} < \sigma_0^2$$

и се отхвърля в противен случай.

Едностранен критерий - $H_0: \sigma^2 \geq \sigma_0^2$; $H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$: нулевата хипотеза не се отхвърля ако

$$\frac{\nu s^2}{\chi^2(\nu, 1-\alpha)} < \sigma_0^2$$

и се отхвърля в противен случай.

Критериите за проверка на дисперсиите, използващи χ^2 разпределението са слабо устойчиви към нарушаване на предпоставката за нормалност, дори и при големи извадки.

Проверка на хипотезата за равенство на две дисперсии

Задачата за сравнение на две дисперсии е една от най-често срещаните в статистическите изследвания. Тя се формулира когато е необходимо да се сравнят две методики за изследване, използва се в статистическия контрол на качеството, при дисперсионния и регресионния анализ за проверка на значимостта на влиянието на даден фактор, за проверка на адекватността на математически модел и др.

σ_1^2 – дисперсията на случайната величина X

σ_2^2 – дисперсията на случайната величина Y

Изчисляват се s_1^2 и s_2^2 – оценки на дисперсиите σ_1^2 и σ_2^2 .

Съставя се дисперсионното отношение:

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2},$$

като в числителя се взема по-голямото от двете оценки (в случая $s_1^2 > s_2^2$).

Изчисляват се броя на степените на свобода за числителя $v_1 = n_1 - 1$ и за знаменателя $v_2 = n_2 - 1$.

При зададено ниво на значимост α от таблиците на разпределението на Фишер или с функцията FINV се определя критичната стойност $F(\alpha, v_1, v_2)$.

Ако $F \leq F(\alpha, v_1, v_2)$, нулевата хипотеза $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ не се отхвърля. В противен случай тази хипотеза се отхвърля и се приема алтернативната хипотеза $H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$.

При анализа на извадкови данни може да се наложи да се провери хипотезата за еднородност на дисперсиите в няколко (повече от две) извадки. В такива случаи може да се използва критерия на Кохрен:

$$G_H = \frac{s_{i \max}^2}{\sum s_i^2}$$

Пример: За предишния пример да се провери хипотезата за равенство на двете дисперсии.

Тъй като $s_2^2 > s_1^2$, то $F = 4,76/3,8 = 1,25$. $F_{кр} = F(0,05, 24, 24) = 1,98$. Тъй като $F \leq F_{кр}$ нулевата хипотеза за равенство на дисперсиите се приема.

Пример: На четири автомата, настроени за обработване на едини и същи детайли са взети по една извадка с обем 10. Оценка на дисперсиите имат следните стойности: $s_1^2 = 106 \mu m$, $s_2^2 = 294 \mu m$, $s_3^2 = 216 \mu m$, $s_4^2 = 410 \mu m$. Да се определи еднаква ли е точността на автоматите, т.е. може ли да се приеме хипотезата за еднородност на дисперсиите.

Прилага се критерия на Кохрен. $G_H = 410/(106+294+216+410) = 0,3996$

Критичната стойност на критерия $G_{Hкр} = 0,502$ при доверителна вероятност 0,95. Тъй като $G_H < G_{Hкр}$ то може да се счита, че точността на автоматите е практически еднаква.

Проверка на хипотези за вида на закона на разпределение

Установяването на закона на разпределение на случайна величина въз основа на статистически данни се състои в това, че се издига хипотеза H_0 за вида на това разпределение и се проверява. Избира се критерий за съгласие и по данните на проведените наблюдения се изчисляват стойностите на критерия и вероятността тази стойност да бъде в съответствие с издигнатата хипотеза H_0 . Ако тази вероятност е достатъчно голяма, хипотезата може да се приеме като непротиворечаща на резултатите от наблюденията.

Един от най-разпространените критерии за съгласие е критерият на Пирсън (χ^2). Този критерий е изисква групиране на данните от наблюденията.

Като критерий за проверка на хипотезата се използва величината:

$$\chi^2 = \sum \frac{(n_i - n p_i)^2}{n p_i}$$

$$p_i = F(x_i) - F(x_{i-1})$$

От таблиците на χ^2 разпределението или с функцията CHINV се определят стойностите $\chi^2_{\alpha, v}$ при зададени ниво на значимост α и брой степени на свобода $v = l - 1 - k$, където l са броя на групите, а k - бр. на изчислените параметри на закона на разпределение (средна стойност, средноквадратично).

Ако $\chi^2 < \chi^2_{\alpha, v}$, то може да се счита, че данните от наблюденията не противоречат на твърдението на нулевата хипотеза и тя може да се приеме.

5.3. Преобразуване на разпределения към нормални

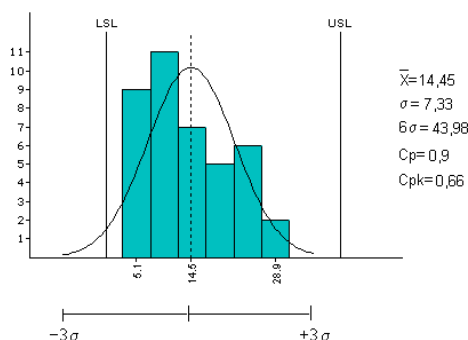
Стандартизираните статистически методи за обработване на данни предполагат данните да имат нормално разпределение. Но в редица случаи това не е изпълнено. Причините за получаване на разпределения отклоняващи се от нормалното разпределение могат да бъдат различни – например:

- наличието на данни с екстремни стойности в малки извадки;
- наслагване на два или повече процеса което води до получаване на дву- или многомодални разпределения;
- осъществяване на измерванията при събирането на данните със средства, които нямат достатъчна разделителна способност и в масива данни броят на различните стойности е недостатъчен;
- събирането на данни след предварително сортиране;
- данните по природа се разпределят по друг закон.

Някои от статистическите методи са относително устойчиви към нарушението на предпоставката за нормалност при условие, че обемите на извадките са големи (например провеждането на t-тест), но други - например статистически контрол на процесите (SPC), анализ на измервателните системи (MSA), анализ на възможностите на процеса (PCA), F-тест и др. - са чувствителни към нарушението на предпоставката за нормалност дори и при големи извадки. При провеждането на експерименти обикновено се обработват данни от извадки с малък обем, което допълнително прави използваните статистически инструменти

силно чувствителни към нарушението на предпоставката за нормалност и може да доведе до значителни грешки в оценките.

Преобразуване на данните: Използването на стандартизираните статистически методи изисква потвърждение за нормално разпределение чрез осъществяване на предварителна проверка за вида на закона на разпределение. Ако това условие не е изпълнено е възможно допускането на значителни грешки в оценката. На фиг.14 е даден пример за оценка на възможностите на процес (РСА-анализ) чрез използване на стандартизираната методика върху данни, за които хипотезата за нормално разпределение не е потвърдена, т.е. налице е отклонение от нормалното разпределение. Оценената зона на разсейване ($6\sigma=43,98$) е значително по-голяма от размаха ($R=23,8$) и индексът C_p показва ниски възможности на процеса, а индексът C_{pk} – 4% несъответствие, въпреки че опитните данни не потвърждават това - стойностите са разположени изцяло между границите LSL и USL.



фиг.14

За да бъде коректно проведен статистическия анализ върху данни с разпределение различно от нормалното са възможни три подхода:

- провеждане на предварително изследване за определяне на вида на закона на разпределение на опитните данни чрез проверка на хипотези, използвайки χ^2 -критерия или други методи и използване на съответните зависимости за потвърденото разпределение;
- оценка на областта от кривата на разпределение, която съответства на зона на разсейване 6σ за нормалното разпределение;
- трансформиране (преобразуване) на данните за получаване на нормално разпределение и използване на общоприетите и стандартизирани зависимости.

Първият подход има недостатъка, че за различните закони на разпределение се използват различни зависимости. Освен това проверката на хипотезата за вида на закона на разпределение е трудоемка задача и изисква значителен опит. Ако хипотезата не са потвърди се издига нова хипотеза и това продължава до потвърждаване на издигнатата за вида на закона на разпределение хипотеза.

Вторият подход не изисква познаване на закона на разпределение. Достатъчно е да се определят 0,135 и 99,865 проценти на опитните данни [4]. Този метод е известен като

метод на Клемент и е подходящ за оценка на зоната на разсейване на опитните данни, която се определя чрез разликата между 99,865 и 0,135 процентиля, а центърът на групиране се оценява чрез 50 процентил (медианата) [9]. Предимствата и недостатъците му са аналогични с тези, при които за оценка на разсейването се използва размаха [5]. За примера от фиг.14 зоната на разсейване, определена по този метод е 25,57, а индексите $C_p=1,56$, $C_{pk}=1,34$, т.е може да се направи заключението, че процесът е с добри възможности за осигуряване на желаното качество.

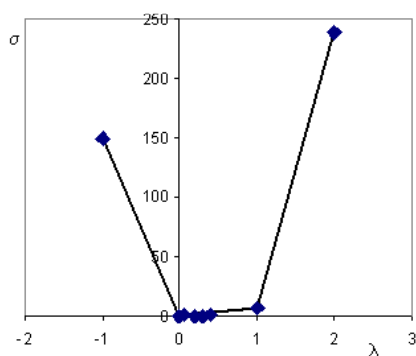
При третият подход данните се преобразуват по такъв начин, че да се получи приблизително нормално разпределение, като за целта с тях се извършват определени математически операции. Един от най-разпространените методи за такова преобразуване е методът Вох-Сох, разработен от Джорж Бокс и Дейвид Кокс [6]. При този метод всяка от стойностите y на оригиналните данни се преобразува в y^* чрез повдигане на степен λ или се логаритмува, ако $\lambda=0$, т.е.

$$y^* = y^\lambda, \text{ когато } \lambda \neq 0$$

и

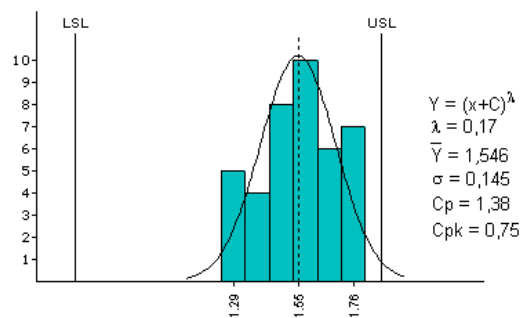
$$y^* = \ln y, \text{ когато } \lambda=0.$$

λ може да приема стойности $-5 \leq \lambda \leq +5$, като от избора на степенния показател λ зависи до каква степен преобразуваните данни имат разпределение близко до нормалното. Обикновено се избира такава стойност на степенния показател λ , при която стандартното отклонение на преобразуваните данни е най-малко (фиг.15).



фиг.15

Ограничително условие за прилагане на метода Вох-Сох е стойностите на данните да бъдат положителни ($y_i > 0$). Но това условие лесно може да се изпълни чрез добавяне на константа към стойностите на всички данни преди повдигането на степен, т.е $y^* = (y+C)^\lambda$.



фиг.16

На фиг.16 е показана хистограмата на данните от фиг.14, преобразувани по метода Вох-Сох. При проверка хипотезата за нормално разпределение не се отхвърля, т.е може да се счита, че преобразуваните данни имат нормално разпределение и стандартизираните статистически методи могат да се приложат. Индексът на възможностите на процеса, определен на база преобразуваните данни е $C_p=1,38$, а процента несъответствия – 1,5%.

Друг известен метод за преобразуване на данни с оглед получаване на нормално разпределение е метода на Джонсън. Той включва семейство от три криви: sb , su , sl , приложими съответно за гама или бета разпределения и разпределение на Стюдент или разпределения близки до нормалното.

$$y^* = \gamma + \eta \ln[(y - \epsilon) / (\lambda + \epsilon - y)] \quad \text{за криви } sb;$$

$$y^* = \gamma + \eta \sinh^{-1}[(y - \epsilon) / \lambda] \quad \text{за криви } su;$$

$$y^* = \gamma + \eta \ln[(y - \epsilon) / \lambda] \quad \text{за криви } sl,$$

където y^* е преобразуваната стойност, y – променливата, която се преобразува, γ , η , ϵ и λ - параметри на кривите на Джонсън.

В редица софтуерни продукти за статистическа обработка на данни са включени и модули за преобразуване на данни с разпределения различни от нормалното, използвайки посочените методи. Използването на такива продукти значително облекчава процеса на преобразуване. За преобразуването на данните по методите Вох-Сох и Клемент могат да се използват и вградените в Excel функции POWER и PERCENTILE.

5.4. Дисперсионен анализ

С помощта на статистически хипотези може да се провери влиянието на един или друг фактор върху изследвания обект. *Дисперсионният анализ* се използва за определянето на значимите влияещи фактори, както и за изследване на влиянието на фактори, които нямат количествен характер.

Всяка случайна величина y може да се разглежда като случайна функция на много и различни по характер фактори. Част от тези фактори оказват незначително влияние върху y и по същество обуславят нейния случаен характер. Друга част от факторите обаче оказват

съществено влияние върху математическото очакване на случайната величина y . Изследването на влиянието на различни по брой и характер фактори по отношение изменението на математическото очакване представлява основна задача на дисперсионния анализ.

За провеждането на такъв анализ е необходимо да бъдат изпълнени следните предпоставки: нормален закон на разпределение; постоянство на дисперсията; независимост на извадките. Нарушаването на тези предпоставки води до известни отклонения на направените статистически изводи.

Обикновено проверката на изпълнението на тези предпоставки изисква голям брой наблюдения и изчисления и практически рядко се извършва такава проверка. Но редица проведени изследвания за устойчивостта на статистическите изводи от дисперсионния анализ показват, че той е малко чувствителен към отклоненията от нормално разпределение на наблюдаваната случайна величина, а при еднакъв обем на извадките и към непостоянство на дисперсията. Това обуславя широкото и ефективно приложение на дисперсионния анализ в практиката.

В зависимост от броя на изучаваните влияещи фактори дисперсионният анализ бива еднофакторен и многофакторен. При еднофакторния дисперсионен анализ се изследва влиянието върху математическото очакване на случайната величина y на един фактор A , който приема k различни стойности $A_1, A_2, \dots, A_k$. Тези стойности могат да не се оценяват количествено, а да се разглеждат като k условни нива. За всяко от нивата се правят случайни извадки с обем n и се подлагат на наблюдение (определят се оценките на математическото очакване). Поставя се задачата да се провери дали влиянието на различните стойности (нива) на фактора A е довело до получаването на различни стойности на математическото очакване на случайната величина y или не. По същество тази задача представлява типичен случай на статистическа проверка на хипотезата (обикновено приемана за нулева), че математическите очаквания при изследваните k случая са равни помежду си.

В резултат на осъществените за всяко ниво на фактора A k случайни извадки с обем n се получават k групи по n данни y_{ij} за случайната величина y , които могат да бъдат представени във вида, показан на табл.5. Средните стойности $\bar{y}_i$ се използват за оценка на математическото очакване.

Всеки резултат y_{ij} може да бъде представен във вид на линеен модел, т.е. като сума от три величини: $y_{ij} = M + \alpha_i + \varepsilon_{ij}$, където M е математическото очакване на y , α_i е константа, отразяваща увеличение или намаление на математическото очакване M при i -то ниво на фактора (отклонението, предизвикано от изменение на контролируемия фактор), а ε_{ij} е грешката на линейния модел (отклонението, предизвикано от измененията на неконтролируемите фактори). Числените характеристики M , α_i , и ε_{ij} , са неизвестни но могат да бъдат оценени с помощта на статистическите оценки $\bar{Y}$, $\bar{y}_i - \bar{Y}$, и $y_{ij} - \bar{y}_i$:

$$y_{ij} = \bar{Y} + (\bar{y}_i - \bar{Y}) + (y_{ij} - \bar{y}_i).$$

Таблица 5

Номер на наблюдението (j)	Стойности (нива) на фактора A (i)						
	A ₁	A ₂	...	A _i	...	A _k	
1	y ₁₁	y ₂₁	...	y _{i1}	...	y _{k1}	
2	y ₁₂	y ₂₂	...	y _{i2}	...	y _{k2}	
.	.	.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	.	.	
n	y _{1n}	y _{2n}	...	y _{in}	...	y _{kn}	
Средна стойност	$\overline{y}_1$	$\overline{y}_2$	...	$\overline{y}_i$	...	$\overline{y}_k$	$\overline{Y}$

За всяка серия от n дублиращи опити се определят оценките на математическото очакване и дисперсията:

$$\bar{y}_i = \frac{1}{n} \sum y_{ij} \quad s_i^2 = \frac{1}{n-1} \sum (y_{ij} - \bar{y}_i)^2$$

Влиянието на неконтролируемите фактори, т.е. на съставляващата ϵ_{ij} може да се оцени с дисперсията:

$$S_R^2 = \frac{1}{k} \sum_1^k s_i^2$$

Общото разсейване, предизвикано както от контролируемите така и от неконтролируемите фактори се оценява с пълната (обща) дисперсия:

$$S_o^2 = \frac{1}{N-1} \sum_1^k \sum_1^n (y_{ij} - \bar{Y})^2, \quad N=kn, \quad \bar{Y} = \frac{1}{k} \sum_1^k \bar{y}_i$$

Разсейването, предизвикано от контролируемите фактори, се оценява с дисперсията:

$$S_A^2 = \frac{1}{k-1} \sum_1^k n_i (\bar{y}_i - \bar{Y})^2$$

За определяне на степента на влияние на контролируемия фактор и съпоставянето му с влиянието на случайните, неконтролируеми фактори се прави проверка за еднородност на дисперсиите S_A^2 и S_R^2 , използвайки критерия на Фишер. Ако отношението $F = S_A^2/S_R^2$ се окаже по-малко от критичното $F_{кр}$, то хипотезата за равенство на дисперсиите се приема и влиянието на контролируемия фактор може да се счита за несъществено и обратното.

Основното уравнение на еднофакторния дисперсионен анализ има вида: $Q=Q_A+Q_R$, където Q е обща сума на квадратите, Q_A - сума на квадратите между групите, Q_R - остатъчна сума на квадратите.

Обработването на данните се извършва в следния ред:

- Определя се общата сума на квадратите Q , която представлява сума от квадратите на отклоненията на всички наблюдения y_{ij} от тяхната средна стойност $\bar{Y}$:

$$Q = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{Y})^2$$

където

$$\bar{Y} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \bar{y}_i$$

- Определя се сумата на квадратите между групите Q_A като сума от квадратите на отклоненията на средните стойности по групи $\bar{y}_i$ от общата средна стойност $\bar{Y}$:

$$Q_A = n \sum_{i=1}^k (\bar{Y} - \bar{y}_i)^2$$

Тя характеризира влиянието на различните стойности (нива) на фактора A върху изменението на математическото очакване на групите по отношение на общото математическо очакване на случайната величина y .

- Определя се остатъчната сума на квадратите Q_R , като сума от квадратите на отклоненията на всяко наблюдение y_{ij} от средната стойност $\bar{y}_i$ на i -тата група:

$$Q_R = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_i)^2$$

Тя характеризира остатъчното разсейване на случайната величина y , породено от действието на случайната грешка ϵ_{ij} .

- Определят се степените на свобода v , v_A и v_R , т.е. броят на независимите величини, участващи в образуването на сумите на квадратите Q , Q_A и Q_R :

$$v=kn - 1;$$

$$v_A=k - 1;$$

$$v_R=k(n - 1).$$

- Определят се статистическите оценки на дисперсията на случайната величина x чрез отношенията на сумите на квадратите Q , Q_A , Q_R и съответните степени на свобода v , v_A и v_R :

$$s^2 = \frac{Q}{v} = \frac{Q}{kn-1}; \quad s_A^2 = \frac{Q_A}{v_A} = \frac{Q_A}{k-1}; \quad s_R^2 = \frac{Q_R}{v_R} = \frac{Q_R}{k(n-1)},$$

които се наричат съответно обща оценка на дисперсията (s^2), оценка на дисперсията по факторите (s_A^2) и остатъчна оценка на дисперсията (s_R^2).

Резултатите от обработката на данните при еднофакторния дисперсионен анализ обикновено се представят във вида, показан на табл.6.

Таблица 6

Сума на квадратите		Степени на свобода	Оценки на дисперсиите
Обща	Q	$v=kn - 1$	$s^2=Q/v$
По фактори	Q_A	$v_A=k - 1$	$s_A^2=Q_A/v_A$
Остатъчна	Q_R	$v_R=k(n - 1)$	$s_R^2=Q_R/v_R$

За проверка на нулевата хипотеза обикновено се използва F-критерия, основан на разпределението на Фишер. За целта се определя дисперсионното отношение (F - отношение):

$$F = \frac{s_A^2}{s_R^2},$$

което се сравнява с критичната стойност F_T на разпределението на Фишер в зависимост от степените на свобода v_A и v_R и избрано ниво на значимост (вероятност за грешка от I род - неправилно отхвърляне на вярна нулева хипотеза). Ако $F < F_T$ няма основание да не се приеме нулевата хипотеза и следователно влиянието на фактора A не може да се счита за съществено. Ако $F > F_T$ нулевата хипотеза се отхвърля и се приема алтернативната й, т.е. има всички основания да се смята, че факторът A влияе съществено върху математическото очакване на у, което не може да се обясни само със случайния характер на извадките.

Целта на дисперсионния анализ е проверка на статистическата значимост на разликите между средните стойности, получени при различните нива на изследвания фактор. Тази проверка се извършва посредством разделяне на сумата на квадратите на компоненти, т.е. посредством разделяне на общата дисперсия на части, едната от които е обусловена от случайни грешки, а втората е свързана с разликите в средните стойности. Дисперсията на извадка се определя от зависимостта:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{Y})^2$$

При фиксиран обем на извадката n дисперсията е функция на сумата на квадратите на отклоненията.

Ако се разгледа следният *пример*:

	Група А ₁	Група А ₂
Наблюдение 1	2	6
Наблюдение 2	3	7
Наблюдение 3	1	5
Средна стойност $\bar{y}_i$	2	6
Сума на квадратите	2	2
Обща средна стойност $\bar{Y}$	4	
Обща сума на квадратите Q	28	

Средните $\bar{y}_i$ за двете групи А₁ и А₂ се различават. Сумата на квадратите на отклоненията вътре във всяка група са равни на 2. Общата сума на квадратите на отклоненията от общата средна стойност, без да се отчита груповата принадлежност е 28. Сумата на квадратите (дисперсията), основана на вътрешногруповата изменчивост има по-малка стойност отколкото общата сума на квадратите, изчислена на базата на общата изменчивост (спрямо общото средно). Общата сума на квадратите Q=28 се разделя на две съставляващи: сума на квадратите, обусловена от вътрешногруповата изменчивост ($Q_R=2+2=4$) и сума на квадратите, обусловена от разликата в средните стойности на групите ($Q_A=28-(2+2)=24$). Сумата на квадратите, обусловена от вътрешногруповата изменчивост обикновено се нарича остатъчна сума на квадратите и характеризира грешката на експеримента.

За статистическа оценка на дисперсиите s^2 , s_A^2 и s_R^2 се използват отношенията на сумите на квадратите към степените на свобода (броят на независимите величини, участващи при определянето на сумите на квадратите). За разгледания пример общата сума Q се определя от $3 \cdot 2 = 6$ независими наблюдения, но във формулата за Q участва и една линейна зависимост $\bar{Y} = 1/6(y_{11}+y_{12}+y_{13}+y_{21}+y_{22}+y_{23})$, поради което броят на независимите величини е $v=kn-1=6-1=5$.

С помощта на F-критерия се оценява статистическата значимост на разликата в средните стойности на групите.

Случаите в които върху едно явление оказва влияние само един фактор са твърде редки. Обикновено се налага изследването на влиянието на множество фактори. За целта може да се приложи еднофакторният дисперсионен анализ за всеки фактор поотделно, но такъв подход води до ненужно увеличаване на обема на наблюденията и не дава възможност за изучаването на съвместното влияние на група фактори.

Многофакторният дисперсионен анализ е особено ефективен метод за едновременното изучаване на влиянието на няколко фактора А, В, С, ... , всеки поотделно и техни съчетания, върху математическото очакване на случайната величина у. При него в повечето случаи не са необходими паралелни наблюдения за всяка комбинация от нива на

факторите, което води до значително намаляване на общия обем наблюдения. Съществува възможност така да се планират и проведат експериментите, че при минимален брой наблюдения да се извлече максимална информация за влиянието на всеки фактор и техни взаимодействия.

Задачата на многофакторния дисперсионен анализ се състои в потвърждаването или отхвърлянето на редица от хипотези за влиянието на множество фактори и техни взаимодействия. За нулеви хипотези се приемат твърденията, че факторите (поотделно и в съчетания) не оказват влияние върху математическото очакване. Данните от проведените наблюдения могат да бъдат представени в таблица (или група таблици) от вида:

Таблица 7

		i						
		A ₁		A ₂			A _k	
I	B ₁	Y ₁₁₁ , Y ₁₁₂ , ..., Y _{11n}		Y ₂₁₁ , Y ₂₁₂ , ..., Y _{21n}			Y _{k11} , Y _{k12} , ..., Y _{k1n}	$\bar{y}_{01}$
	B ₂	Y ₁₂₁ , Y ₁₂₂ , ..., Y _{12n}		Y ₂₂₁ , Y ₂₂₂ , ..., Y _{22n}			Y _{k21} , Y _{k22} , ..., Y _{k2n}	$\bar{y}_{02}$
	B _q	Y _{1q1} , Y _{1q2} , ..., Y _{1qn}		Y _{2q1} , Y _{2q2} , ..., Y _{2qn}			Y _{kq1} , Y _{kq2} , ..., Y _{kqn}	$\bar{y}_{0q}$
		$\bar{y}_{10}$		$\bar{y}_{20}$			$\bar{y}_{k0}$	$\bar{Y}$

Общият брой наблюдения N при два фактора A и B (к нива на фактора A и q нива на фактора B) ще бъде N=nkq.

При двуфакторния дисперсионен анализ всеки резултат от наблюденията може да бъде представен чрез следния модел:

$$y_{ijl} = M + \alpha_i + \beta_l + \alpha\beta_{il} + \epsilon_{ijl},$$

в който M е общото математическо очакване на y, α_i отразява изменението на M под влиянието на i-то ниво на фактора A, β_l отразява изменението на M под влиянието на l-то ниво на фактора B, ϵ_{ijl} отразява случайното изменение на y, а $\alpha\beta_{il}$ отразява съвместното влияние на факторите A и B (по-точно на i-то ниво на A и l-то ниво на B). За да се проведе в пълен вид (с отчитане на взаимодействието) двуфакторния дисперсионен анализ, са необходими паралелни наблюдения, т.е. $n \geq 2$. При повече от два фактора (многофакторен дисперсионен анализ) това изискване не е необходимо и много често наблюденията не се дублират.

Основното уравнение на дисперсионния анализ при два фактора с отчитане на взаимодействието има вида: $Q = Q_A + Q_B + Q_{AB} + Q_R$, където Q, Q_A , Q_B , Q_{AB} , Q_R са суми на квадратите – съответно обща сума на квадратите, сума на квадратите между групите на фактора A, сума на квадратите между групите на фактора B, сума на квадратите между групите на взаимодействието на A и B и остатъчна сума на квадратите:

$$Q = \sum_1^k \sum_1^q \sum_1^n (y_{ij} - \bar{Y})^2$$

$$Q_A = nq \sum_1^k (\bar{y}_{i0} - \bar{Y})^2$$

$$Q_B = nk \sum_1^q (\bar{y}_{0l} - \bar{Y})^2$$

$$Q_{AB} = n \sum_1^k \sum_1^q (\bar{y}_{il} - \bar{y}_i - \bar{y}_{0l} + \bar{Y})^2$$

$$Q_R = \sum_1^k \sum_1^q \sum_1^n (y_{ij} - \bar{y}_{il})^2$$

Броят на степените на свобода на тези суми на квадрати са съответно:

$$v=N-1; \quad v_A=k-1; \quad v_B=q-1; \quad v_{AB}=(k-1)(q-1); \quad v_R=kq(n-1).$$

За оценка на дисперсията се използват отношенията на сумите на квадратите и съответните степени на свобода:

$$s^2=Q/v; \quad s_A^2=Q_A/v_A; \quad s_B^2=Q_B/v_B; \quad s_{AB}^2=Q_{AB}/v_{AB}; \quad s_R^2=Q_R/v_R.$$

С помощта на F-критерия се проверяват три хипотези (фактора А, фактора В и взаимодействието АВ не оказват влияние върху математическото очакване) чрез сравняване на отношенията $F_A=s_A^2/s_R^2$, $F_B=s_B^2/s_R^2$, $F_{AB}=s_{AB}^2/s_R^2$ с табличните стойности F_A^T , F_B^T , F_{AB}^T , определени от таблиците за F-разпределение. Решенията за приемането или отхвърлянето на всяка от трите хипотези се вземат поотделно и независимо.

6. Обработка на резултатите от пасивен експеримент (Построяване на емпиричен модел по данни от пасивен експеримент)

Целта на провеждане на експеримента е установяване на вида на зависимостта $Y=f(x)$ – еднофакторен експеримент, или на зависимостта $Y=f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_k)$ – многофакторен експеримент. За това е необходимо едновременно измерване на m стойности на x_i , и съответстващите им стойности y_i , а задачата на експеримента е установяване на математическия модел на изследваната зависимост (установяване на връзката между две редици наблюдения - измервания). Обикновено тази връзка е стохастична (вж. т.2) и за нейният анализ се използват методите на регресионния, корелационния и дисперсионния анализи (вж. т.5.4).

Основните етапи в обработката на резултатите след провеждане на експеримента са следните:

- Избор на вида на зависимостта $Y=f(x)$
- Определяне на коефициентите в уравнението на регресия
- Оценка на коефициентите в уравнението
- Оценка на адекватността на модела

Обикновено резултатите от експеримента се представят в табличен вид. Видът на зависимостта $Y=f(x)$ може да бъде избран или на базата на физическите закономерности описващи явлението, или на базата на предишен опит и предварителен анализ на графичното представяне на експерименталните данни. В някои случаи интервалът на изменение на входната величина x може да бъде разделен на части и всяка част да се представя с различни зависимости.

Графичното представяне на съвкупността от всички точки (x_i, y_i) , получени при наблюдението (корелационно поле) дава визуална представа за връзката между величините x и y . За потвърждаване на наличието на функционална връзка между величините x и y , формата и нейната сила се определят коефициента на корелация r_{xy} и корелационното отношение R^2 . Коефициентът на корелация се определя по зависимостта:

$$r_{xy} = \frac{C_{xy}}{s_x s_y},$$

където s_x и s_y са средноквадратичните отклонения съответно за променливите x и y , а C_{xy} е ковариация на случайните величини x и y :

$$C_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

За изчисляване на коефициента на корелация в Excel се използва функцията CORREL. Коефициентът на корелация има стойност в границите $-1 < r_{xy} < +1$. Колкото е по-близък да $+1$, толкова е по-силна положителната линейна корелационна връзка (с нарастването на x нараства и y). Колкото r_{xy} е по-близък до -1 , толкова е по-силна отрицателната линейна корелационна връзка (с нарастването на x намалява y). При $r_{xy}=1$ между величините x и y съществува линейна функционална зависимост. При стойности на коефициента на корелация близки до нула може да се предполага или наличие на нелинейна корелационна връзка, или въобще отсъствие на връзка. В такъв случай се определя корелационното отношение $\eta_y = S(\bar{y}_x)/S_y$, което е в границите $0 < \eta_y < 1$, при това $\eta_y \geq |r_{xy}|$. При $\eta_y=0$ между величините x и y отсъства връзка, а при $\eta_y = 1$ между x и y съществува еднозначна функционална връзка, която при $r_{xy}=0$ е нелинейна.

Като показател за качеството на регресионен модел, описващ връзката между x и y се използва коефициент на детерминация на модела R^2 .

$$R^2 = 1 - \frac{s_R^2}{s^2},$$

където s_R^2 е остатъчната дисперсия, а s^2 е общата дисперсия, или:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum (y_i - Y_i)^2}{\sum (y_i - y_{cp})^2}$$

където $y_{cp} = \frac{1}{m} \sum y_i$

Колкото коефициентът на детерминация R^2 е по-близък до единица, толкова по-добро е качеството на модела. Недостатък на коефициента R^2 е това, че неговата стойност се увеличава при добавяне в модела на нови променливи. Затова сравняването на модели с различен брой променливи посредством R^2 е некоректно. Този недостатък може да се избегне с използването на коригиран коефициент на детерминация R_{agj}^2 .

$$R_{agj}^2 = 1 - (1 - R^2) \frac{N - 1}{N - k - 1}$$

където N – общият брой наблюдения, k – бр. на параметрите в уравнението на регресия без свободния член.

За изследването на връзката между повече от две величини (например връзката на y с два фактора x_1 и x_2) се използва коефициентът на множествена корелация R_{yx1x2} , който се определя чрез коефициентите на корелация r_{yx1} , r_{yx2} и r_{x1x2} :

$$R_{yx1x2} = \sqrt{\frac{r_{yx1}^2 + r_{yx2}^2 - 2r_{yx1}r_{x1x2}}{1 - r_{x1x2}^2}}$$

Най-голямо приложение за определяне на коефициентите в уравнението на регресия е намерил метода на най-малките квадрати, при който коефициентите се избират така, че сумата от квадратите на остатъчните грешки да бъде минимална.

При линейна зависимост от вида $Y = a + bx$, коефициентите a и b се определят както следва:

$$a = \frac{\sum x_i^2 \cdot \sum y_i - \sum x_i \cdot \sum x_i y_i}{m \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}; \quad b = \frac{m \sum x_i y_i - \sum x_i \cdot \sum y_i}{m \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

или с използване на функциите на Excel: INTERCEPT, SLOPE или с функцията LINEST.

В случай на нелинейна зависимост $Y=f(x)$ апроксимационната задача се решава с преобразуване на нелинейната зависимост в линейна чрез замяна на променливите. Например функцията $y=a.e^{bx}$ се преобразува в линейна $y^*=a^*+bx$, където $y^*=\ln y$; $a^*=\ln a$.

Стойностите y_i , получени при експеримента не са истинските стойности, а резултати от измерване с определена грешка. Ако не са правени многократни измервания (повторения на опитите) тази грешка може да бъде определена чрез анализ на самите данни. Отклонението на експерименталните резултати от резултатите, получени чрез модела $Y=a+bx$ се характеризира от дисперсията σ_y^2 , която може да бъде оценена чрез остатъчната дисперсия s_R^2 :

$$s_R^2 = \frac{\sum (y_i - Y_i)^2}{m - l}$$

където $Y_i=a+bx_i$; l е броя на коефициентите в уравнението на регресия (при линеен модел $l=2$).

Чрез средноквадратичното отклонение s_y :

$$s_y = \sqrt{s_R^2} = \sqrt{\frac{\sum (y_i - Y_i)^2}{m - l}}$$

което характеризира грешката на експеримента могат да бъдат определени и средноквадратичните отклонения на коефициентите в уравнението на регресия s_a и s_b :

$$s_a = \sigma_y \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{m \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}}$$

$$s_b = \sigma_y \sqrt{\frac{m}{m \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}}$$

Доверителният интервал на коефициентите a и b ще бъде:

$$\epsilon_a = t_{\alpha,k} \cdot s_a$$

$$\epsilon_b = t_{\alpha,k} \cdot s_b$$

където $t_{\alpha,k} = \text{TINV}(\alpha, k)$

α - ниво на значимост (обикновено се приема $\alpha=0,05$)

k – брой на степените на свобода ($k=m-1$)

Тогава моделът има вида $Y=a \pm \epsilon_a + (b \pm \epsilon_b)x$

Проверката за адекватност на модела когато не са правени многократни измервания (повторения на опитите) се извършва чрез сравняване на дисперсиите s_{cp}^2 и s_R^2 . Прави се проверка на хипотезата за равенство на тези две дисперсии, като се използва критерия на Фишер (F-критерий).

$$s_{cp}^2 = \frac{\sum (Y_i - y_{cp})^2}{l-1}; \quad y_{cp} = \frac{1}{m} \sum y_i$$

$$F = \frac{s_{cp}^2}{s_R^2}$$

Получената стойност на F се сравнява с критичната стойност $F_{\alpha, k_1, k_2} = FINV(\alpha, k_1, k_2)$.

$$k_1 = l - 1; \quad k_2 = m - l$$

Ако $F > F_{\alpha, k_1, k_2}$ то хипотезата за равенство на дисперсиите се отхвърля, т.е. остатъчната дисперсия s_R^2 , която характеризира грешката на експеримента е по-малка от s_{cp}^2 . Тогава моделът може да се счита за адекватен, т.е. отразява добре експерименталните резултати.

Ако $F < F_{\alpha, k_1, k_2}$ то хипотезата за равенство на дисперсиите се приема, т.е. остатъчната дисперсия s_R^2 не е по малка от s_{cp}^2 и моделът не е адекватен. Следва да се търси друг модел.

При използване за апроксимация функциите на Excel LINEST или LOGEST, могат да бъдат изчислени десет параметъра. Маркира се област за изход (две колони пет реда), въвежда се функцията =LINEST(масив у; масив х; TRUE; TRUE) и се потвърждава с Ctrl+Shift+Tab. Получават се стойностите:

b	a
s_b	s_a
R^2	s_R
F	$m-l$
SS_{cp}^2	SS_R^2

$SS_{cp}^2 = \sum (Y_j - y_{cp})^2$; $SS_R^2 = \sum (y_j - Y_j)^2$ са суми на квадратите, които ако се разделят на броя степени на свобода ще се получат дисперсиите s_{cp}^2 и s_R^2 .

За апроксимация на зависимост от вида $Y = a \cdot b^x$ може да се използва функцията LOGEST.

Обикновено в повечето случаи експеримента се провежда с многократни наблюдения на изходната величина у (правят се n повторения на m опита), което позволява да се получи информация и за възпроизводимост на резултатите.

№	x	y ₁	y ₂	...	y _i	...	y _n	Средно	σ	Модел	$\bar{y} - Y$	$(\bar{y} - Y)^2$
1	x ₁	y ₁₁	y ₁₂		y _{1i}		y _{1n}	$\bar{y}_1$	S ₁	Y ₁		
2	x ₂	y ₂₁	y ₂₂		y _{2i}		y _{2n}	$\bar{y}_2$	S ₂	Y ₂		
...	...											
j	x _j	y _{j1}	y _{j2}		y _{ji}		y _{jn}	$\bar{y}_j$	S _j	Y _j		
...	...											
m	x _m	y _{m1}	y _{m2}		y _{mi}		y _{mn}	$\bar{y}_m$	S _m	Y _m		

В такъв случай остатъчната дисперсия s_R^2 може да се представи като сума от две дисперсии – дисперсия, характеризираща адекватността на модела $s_{ад}^2$ и дисперсия, характеризираща възпроизводимостта на резултатите s_B^2 :

$$s_R^2 = s_{ад}^2 + s_B^2$$

$$s_{ад}^2 = \frac{n}{m-l} \sum (\bar{y}_j - Y_j)^2$$

$$s_B^2 = \frac{1}{m} \sum S_j^2 = \frac{1}{m(n-1)} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_j)^2$$

където:

$$S_j^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_j)^2 = VAR(y_{j1}, y_{j2}, \dots, y_{jn})$$

$$\bar{y}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_{ij} \text{ - средноаритметичното от } n \text{ опита в точка с номер } j$$

n – брой на повторенията (паралелните опити)

Проверката за адекватност на модела се извършва чрез сравняване на дисперсиите $s_{ад}^2$ и s_B^2 . При адекватен модел $s_{ад}^2 < s_B^2$. Ако $s_{ад}^2 > s_B^2$ се прави проверка на хипотезата за равенство на тези дисперсии чрез F-критерия:

$$F = \frac{s_{ад}^2}{s_B^2} < F_{\alpha, k_1, k_2}; \quad k_1 = m-l; \quad k_2 = m(n-1);$$

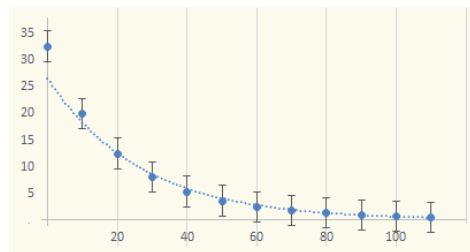
Ако това условие е изпълнено се потвърждава хипотезата за равенство на дисперсиите, т.е. дисперсията $s_{ад}^2$ не е по голяма от s_B^2 и моделът е адекватен.

В някои случаи е удобно за предварителна проверка за адекватност и за нагледно представяне да се сравнят отклоненията $(\bar{y}_j - Y_j)$ с доверителният интервал ϵ на средноаритметичната стойност $\bar{y}_j$.

$$\epsilon = \pm \frac{s_B}{\sqrt{n}} Z_{1-\alpha/2}$$

където: $s_B = \sqrt{s_B^2} = \frac{1}{m} \sum S_j$; $S_j = \text{STDEV}(y_{j1}, y_{j2}, \dots, y_{jn})$
 $z_{1-\alpha/2} = \text{NORMSINV}(1-\alpha/2)$; $t_{\alpha/2, k} = \text{TINV}(\alpha/2, k)$.

В интервалът от стойности на x_j за който $|\bar{y}_j - Y_j| < \epsilon$ може да се очаква адекватност на модела. Този метод има недостатъка, че доверителният интервал е зависи от броя на паралелните опити n когато $n < 30$, но пък позволява нагледно представяне (вж фиг.) и определяне на интервала от стойности на x в който може да се очаква адекватност. Окончателно адекватността се потвърждава чрез сравняване на дисперсиите $s_{ад}^2$ и s_B^2 и използване на F-критерия.



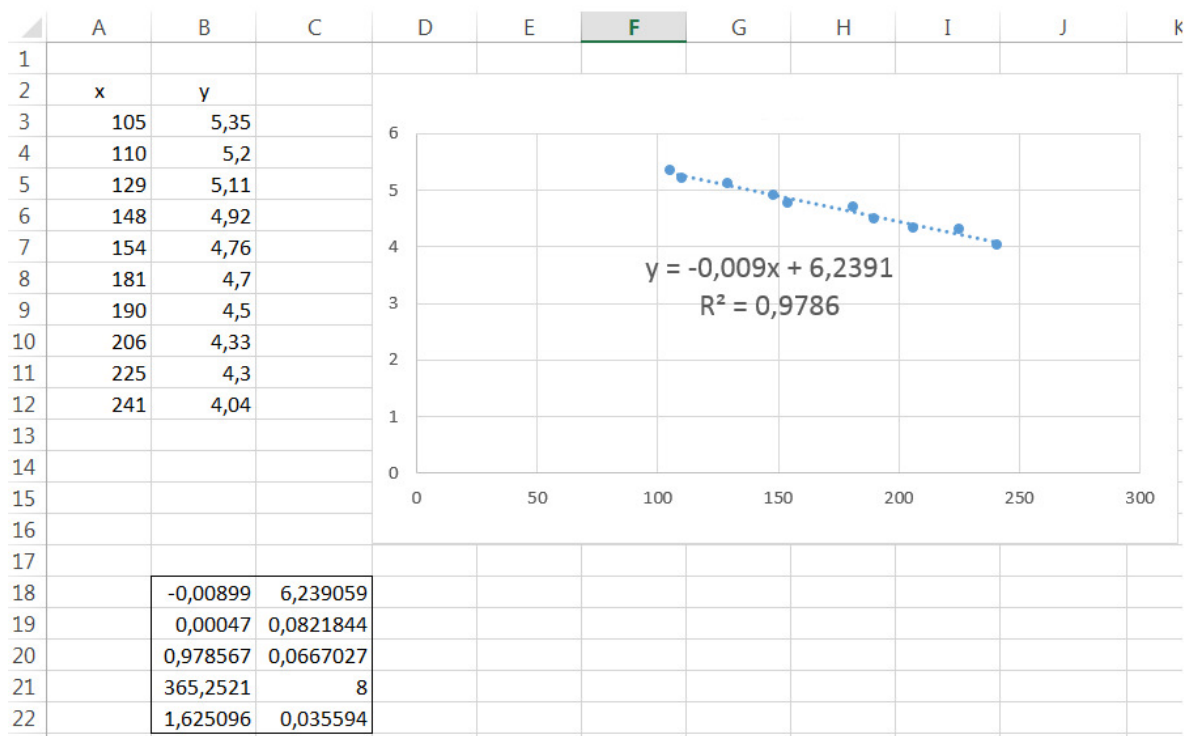
Пример: Да се състави математически модел на товарната характеристика на преобразувател на мощност. Измерени са 10 ($m=10$) двойки стойности на тока на товар I_T и изходното напрежение U_n [7].

I_T , mA	105	110	129	148	154	181	190	206	225	241
U_n , V	5,35	5,20	5,11	4,92	4,76	4,70	4,50	4,33	4,30	4,04

Построява се графика в Excel, от която се вижда, че може да се очаква линейна зависимост от вида $Y=a+bx$.

Маркира се област от две колони, пет реда (в случая областта е B18:C22) и се въвежда функцията $=\text{LINEST}(B3:B12;A3:A12;\text{TRUE};\text{TRUE})$ и се потвърждава с Ctrl+Shift+Tab. Получават се стойностите на основните параметри:

$$a=6,2391; b= -0,009; s_a=0,0822; s_b=0,0005; R^2=0,9786; s_R=0,0667; SS_{cp}^2=1,625$$



С така намерените коефициенти а и b се определят стойностите $Y=a+bx$.

x	105	110	129	148	154	181	190	206	225	241
y	5,35	5,20	5,11	4,92	4,76	4,70	4,50	4,33	4,30	4,04
Y	5,295	5,250	5,080	4,909	4,855	4,612	4,531	4,388	4,217	4,073
y-Y	0,055	-0,05	0,03	0,011	-0,095	0,088	-0,031	-0,058	0,083	-0,033

Стойността на коефициента R^2 показва, че зависимостта е близка до функционална.

За определяне на доверителния интервал на коефициентите а и b се определя $t_{\alpha,k}$ чрез функцията TINV:

При $\alpha=0,05$ и степени на свобода $k=m-1=9$, $t_{\alpha,k}=TINV(0,05,9)=2,262$

Доверителният интервал на коефициентите а и b ще бъде:

$$\epsilon_a = t_{\alpha,k} \cdot s_a = 2,262 \cdot 0,0822 = 0,186$$

$$\epsilon_b = t_{\alpha,k} \cdot s_b = 2,262 \cdot 0,0005 = 0,001$$

т.е. $a=6,239 \pm 0,186$ V; $b=-0,009 \pm 0,001$ V/mA

Математическият модел има вида $U_{II} = 6,239 \pm 0,186 - (0,009 \pm 0,001) \cdot I_T$

За проверка на адекватност на модела се сравняват дисперсиите s_{cp}^2 и s_R^2 с използване критерия на Фишер.

$$s_{cp}^2 = \frac{\sum (y_i - y_{cp})^2}{l-1} = \frac{SS_{cp}^2}{l-1} = \frac{1,625}{2-1} = 1,625$$

$$s_R^2 = 0,0667^2 = 0,004$$

$$F = \frac{s_{cp}^2}{s_R^2} = \frac{1,625}{0,004} = 406$$

При $\alpha=0,05$; $k_1=l-1=2-1=1$; $k_2=m-1=10-2=8$; $F_{\alpha,k_1,k_2}=FINV(0,05,1,8)=5,318$.

Тъй като не са правени многократни измервания на U_n при една и съща стойност на T , условието за адекватност на модела е $F > F_{\alpha,k_1,k_2}$. Това условие е изпълнено и моделът може да се счита за адекватен, т.е. добре отразяващ експерименталните резултати.

Пример: Производител на терморезистори, за приблизително определяне на съпротивлението R в зависимост от температура T е представил математически модел от вида:

$$R = R_N \cdot e^{B\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_N}\right)},$$

където R_N е номиналното съпротивление при температура $T_N=298^\circ\text{K}$;

За терморезистор тип B57861: $R_N=10\text{k}\Omega$; $B=3988$.

Да се определи експериментално интервала от стойности на температурата T , за който този модел е приложим (адекватен).

Проведен е експеримент при който е измервано съпротивлението r при температури T в интервала $0-110^\circ\text{C}$, като за всяка стойност на T са правени по пет измервания на съпротивлението r ($n=5$ повторения). Експерименталните резултати са дадени в таблицата. Определени са средноаритметичните стойности $\bar{r}$, стойностите R изчислени по модела, разликите $\bar{r} - R$.

$T^\circ\text{C}$	$r, \text{k}\Omega$					$\bar{r}$	Модел	$\bar{r} - R$
	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5		R	
0	32,46	32,755	32,645	32,746	32,648	32,651	34,842	-2,191
10	19,985	19,805	19,875	19,975	19,892	19,906	20,794	-0,888
20	12,365	12,555	12,445	12,57	12,51	12,489	12,207	0,282
30	8,088	8,105	7,955	7,995	8,128	8,054	8,203	-0,149
40	5,455	5,305	5,375	5,354	5,155	5,329	5,387	-0,058
50	3,655	3,56	3,705	3,45	3,652	3,604	3,631	-0,027
60	2,438	2,452	2,605	2,682	2,305	2,496	2,506	-0,01
70	1,62	1,855	1,85	1,652	1,815	1,758	1,768	-0,01
80	1,195	1,265	1,306	1,42	1,135	1,264	1,272	-0,008
90	0,96	0,855	0,988	0,995	0,79	0,918	0,931	-0,013
100	0,445	0,708	0,81	0,852	0,635	0,69	0,694	-0,004
110	0,595	0,412	0,584	0,51	0,455	0,511	0,525	-0,014

Определя се доверителният интервал ε : $\varepsilon = \pm \frac{s_B}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2}$

При $\alpha=0,05$ $z_{1-\alpha/2} = \text{NORMSINV}(1-0,025) = 1,96$

$$s_B = \sqrt{s_B^2} = \frac{1}{12} \sum s_j; \quad s_j = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (r_{ij} - \bar{r}_j)^2} = \text{STDEV}(r_{j1}, r_{j2}, \dots, r_{j5})$$

$$s_B = 0,106$$

$$\varepsilon = \pm \frac{0,106}{\sqrt{5}} 1,96 = \pm 0,0926$$

За предварителна оценка на интервала в който може да се очаква адекватност на модела се сравняват разликите $|\bar{r}_j - R_j|$ с доверителният интервал ϵ . В интервалът на температури от 40 - 110°C тези разлики са по-малки от ϵ и адекватност на модела е вероятна. В интервала 0 - 40°C този модел няма да отразява добре експерименталните резултати.

Прави се проверка за адекватност на модела в интервала 40 - 110°C чрез сравняване на дисперсиите s_a^2 и s_B^2 , тъй като разликите са по-големи от ϵ .

$$s_B^2 = 0,106^2 = 0,0112$$

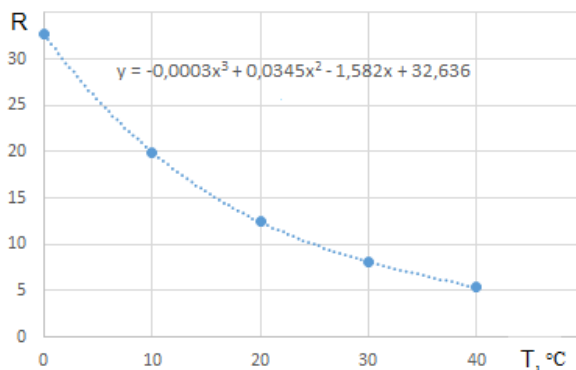
$$s_{ад}^2 = \frac{n \sum (\bar{r}_j - R_j)^2}{m - l} = \frac{5,0,0047}{8 - 2} = 0,0039$$

Тъй като $s_{ад}^2 < s_B^2$, то адекватността на модела в интервала 40 - 110°C се потвърждава.

За интервалът 0 - 40°C с помощта на Excel се определя друг модел от вида на полином от трета степен:

$$R = 32,636 - 1,582 \cdot T + 0,0345 \cdot T^2 - 0,0003 \cdot T^3$$

T, °C	$\bar{r}$	R	$\bar{r} - R$
0	32,651	32,636	0,015
10	19,906	19,966	-0,06
20	12,489	12,396	0,093
30	8,054	8,126	-0,072
40	5,329	5,356	-0,027



Тъй като най-голямата разлика $|\bar{r}_j - R_j| \approx \epsilon$, а не е по-малка от доверителния интервал се сравняват дисперсиите s_a^2 и s_B^2 .

$$s_{ад}^2 = \frac{5 \sum (\bar{r}_j - R_j)^2}{m - l} = \frac{5,0,01839}{5 - 4} = 0,0919$$

$$s_B^2 = 0,106^2 = 0,0112$$

Тъй като $s_{ад}^2$ не е по-малко от s_B^2 се прави проверка за равенство на тези две дисперсии с критерия на Фишер:

$$F = \frac{s_{ад}^2}{s_B^2} = 8,2$$

$$F_{\alpha, k1, k2} = FINV(0,05; 1; 20) = 4,35$$

Тъй като $F > F_{\alpha, k1, k2}$ адекватност не се потвърждава.

Съставя се нов модел за целия интервал 0-110°C от вида:

$$R = 1 / (a_0 + a_1 T + a_2 T^2 + a_3 T^3 + a_4 T^4 + a_5 T^5)$$

където:

$$a_0=0,0306; a_1=1,5688 \cdot 10^{-3}; a_2=3,427 \cdot 10^{-5}; a_3=4,8022 \cdot 10^{-7}; a_4=2,5939 \cdot 10^{-9}; a_5=2,2736 \cdot 10^{-11}$$

T, °C	$\bar{r}$, kΩ	R	$\bar{r} - R$	$(\bar{r} - R)^2$
0	32,651	32,6797	-0,0287	0,00083
10	19,906	19,9109	-0,0049	0,00002
20	12,489	12,4977	-0,0087	0,00008
30	8,054	8,0561	-0,0021	0,00000
40	5,329	5,3222	0,0068	0,00005
50	3,604	3,5963	0,0077	0,00006
60	2,496	2,4806	0,0154	0,00024
70	1,758	1,7435	0,0145	0,00021
80	1,264	1,2468	0,0172	0,00030
90	0,918	0,9059	0,0121	0,00015
100	0,69	0,6679	0,0221	0,00049
110	0,511	0,4993	0,0117	0,00014
Σ				0,00255

Най-голямата разлика $|\bar{r}_j - R_j|=0,0287$ е по-малка от доверителния интервал $\epsilon=0,0926$ и може да се очаква адекватност. Прави се проверка за адекватност на модела чрез сравняване на дисперсиите $s_{ад}^2$ и s_B^2 .

$$s_{ад}^2 = \frac{n}{m-l} \sum (\bar{r}_j - R_j)^2 = \frac{5}{12-6} 0,00255 = 0,0021$$

$$s_B^2=0,106^2=0,0112$$

Тъй като дисперсията на адекватност е по-малка от дисперсията на възпроизводимост ($s_{ад}^2 < s_B^2$) то адекватност на модела се потвърждава.

7. Обработка на резултатите от активен експеримент

Избират се основните фактори и техните нива на вариране. Като фактори могат да се избират само контролируеми и управляеми фактори, т.е. такива, които изследователят може да поддържа постоянни на зададено ниво по време на провеждане на опита. Като фактори трябва да бъдат включени тези, които оказват най-силно влияние върху реакцията. Тези фактори могат да бъдат определени чрез проведен дисперсионен анализ. Друго условие е възможността за независимо изменение на нивото на всеки фактор. За всеки фактор се указва интервала на изменение, в границите на който се извършва изследването. Съставя се план на експеримента (вж. т.2) и се провежда експеримента, като за всеки опит се правят по m повторения (паралелни наблюдения) и се определя средноаритметичното $\bar{y}$.

Табл.8

№ на опита	x ₀	x ₁	x ₂		x _k	Опит1 y ₁	Опит2 y ₂		Опит n y _n	$\bar{y}_j$	Модел Y _j	Дисперсия S _j ²
1	+1	-1	-1							$\bar{y}_1$	Y ₁	S ₁ ²
2	+1	+1	-1							$\bar{y}_2$	Y ₂	S ₂ ²
	+1	-1	+1									
j	+1	+1	+1					y _{ij}		$\bar{y}_j$	Y _j	S _j ²
m										$\bar{y}_m$	Y _m	S _m ²

Определят се извадковите дисперсии $S_j^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_j)^2$ и се прави проверка на хипотезата за еднородност на дисперсиите по критерия на Кохрен (вж.т.5.2).

Определят се коефициентите в уравнението на регресия от зависимостите:

$$a_0 = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m y_j \cdot x_{0j}$$

$$a_1 = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m y_j \cdot x_{1j}$$

.....

$$a_{12} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m y_j (x_1 x_2)_j$$

$$a_{123} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m y_j (x_1 x_2 x_3)_j$$

и се изчисляват стойностите Y по уравнението на регресия.

Извадковата дисперсия се определя от зависимостта:

$$S_j^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_j)^2,$$

където $\bar{y}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_{ij}$ - средноаритметичното от n опита в точка с номер j

n – брой на повторенията (паралелните опити)

Дисперсията на възпроизводимост $S^2_{\text{възпр}}$ е средноаритметичната дисперсия от всички p различни варианти на опити:

$$S^2_{\text{възпр}} = \frac{1}{m} \sum S_j^2 = \frac{1}{m(n-1)} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_j)^2$$

m – брой на опитите (вариантите)

За оценка на значимостта на коефициентите трябва да се определи дисперсията на коефициентите на регресия:

$$S_a^2 = \frac{1}{m \cdot n} S^2_{\text{възпр}}$$

Проверката на значимост на всеки коефициент се извършва с помощта на критерия на Стюдент (t-критерия). Намира се доверителния интервал на коефициента на регресия $\Delta_{aj} = t_{\alpha, m(n-1)} S_a$. Ако $|a_j| > \Delta_{aj}$, то коефициента е значим. Статистически незначимите коефициенти се изключват от уравнението на регресия.

Дисперсията за адекватност на модела (характеризираща разсейването на резултатите от експеримента спрямо уравнението на регресия) се определя от зависимостта:

$$S^2_{\text{адекв}} = \frac{n}{m-l} \sum_{j=1}^m (\bar{y}_j - Y_j)^2$$

n – брой на опитите (вариантите); l – брой на членовете в уравнението на регресия (брой на коефициентите a_i).

Проверката за адекватност на модела се извършва с помощта на критерия на Фишер:

$$F = \frac{S^2_{\text{адекв}}}{S^2_{\text{възпр}}}$$

Ако $F < F_{\alpha, m_1, m_2}$ за съответните степени на свобода $m_1 = m - l$, $m_2 = m(n - 1)$, при зададено ниво на значимост α , то моделът се счита за адекватен. Ако адекватността на модела не се потвърди, се намалява интервала на вариране на факторите или се преминава към план от втори порядък.

Пример: Да се построи математически модел на зависимостта на якостта на опън σ_B на алуминиева сплав от съдържанието в нея на литий, температурата и времето на стареене.

	код	Фактори		
		Съдържание на литий, % x ₁	Температура на стареене, °C x ₂	Време на стареене, h x ₃
Стъпка на вариране ΔX _i		0,5	25	2
Основно ниво	0	1	175	4
Горно ниво	+1	1,5	200	6
Долно ниво	-1	0,5	150	2

Кодирането на нивата на факторите се извършва по зависимостта: $x_i = \frac{(X_i - \bar{X}_i)}{\Delta X_i}$

Избира се дробен факторен план 2³⁻¹

№ на опита	x ₀	x ₁	x ₂	x ₃ =x ₁ x ₂	Опит1 y ₁	Опит2 y ₂	Опит3 y ₃	$\bar{y}_j$	Модел Y _j	Дисперсия S _j ²
1	+1	-1	-1	+1	25	24	26	25	24,35	1
2	+1	+1	-1	-1	20	19	21	20	20,665	1
3	+1	-1	+1	-1	36	40	37	37,66	36,995	2.08
4	+1	+1	+1	+1	40	39	41	40	40,665	1

Определят се извадковите дисперсии $S_j^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_j)^2$

$$S_1^2=1; S_2^2=1; S_3^2=2,08; S_4^2=1$$

Прави се проверка на хипотезата за однородност на дисперсиите по критерия на Кохрен:

$$G = \frac{S_{j \max}^2}{\sum S_j^2} = \frac{2.08}{1+1+2.08+1} = 0.409$$

G_{α,p,n}=0,7679; при α=0,05, p=n-1=2, m=4. Тъй като G < G_{α,p,n} то дисперсиите са однородни.

Определят се коефициентите в уравнението на регресия $Y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$

$$a_0 = \frac{1}{m} \sum_1^m \bar{y}_j x_{0j} = \frac{1}{4} (25 + 20 + 37.66 + 40) = 30.665$$

$$a_1 = \frac{1}{m} \sum_1^m \bar{y}_j x_{1j} = \frac{1}{4} (-25 + 20 - 37.66 + 40) = -0.665$$

$$a_2 = \frac{1}{m} \sum_1^m \bar{y}_j x_{2j} = \frac{1}{4} (-25 - 20 + 37.66 + 40) = 8.165$$

$$a_3 = \frac{1}{m} \sum_1^m \bar{y}_j x_{3j} = \frac{1}{4} (25 - 20 - 37.66 + 40) = 1.835$$

Проверява се значимостта на коефициентите на уравнението на регресия, като предварително се определя дисперсията на възпроизводимост:

$$S_{\text{възп}}^2 = \frac{1}{m} \sum S_j^2 = \frac{1}{4}(1+1+2,08+1) = 1,27$$

Дисперсията на коефициентите на уравнението на регресия е:

$$S_a^2 = \frac{1}{m.n} S_{\text{възп}}^2 = \frac{1}{12} 1,27 = 0,1058$$

Намира се стойността на доверителния интервал на коефициента с помощта на критерия на Стюdent:

$$\Delta_{aj} = t_{\alpha, m(n-1)} \cdot S_a = t_{0,05;8} \cdot S_a = 2,3.0,1058^{1/2} = 2,3.0,33 = 0,759$$

Тъй като коефициентът $|a_1|$ е по-малък от 0,759, то той не е значим и може да бъде изключен от уравнението на регресия. Тогава уравнението на регресия добива вида:

$$Y = a_0 + a_2 x_{2j} + a_3 x_{3j} = 30,665 + 8,165 x_2 + 1,835 x_3$$

Резултатите за Y по получения модел са:

$$Y_1 = a_0 + a_2 \cdot (-1) + a_3 \cdot (+1) = 30,665 - 8,165 + 1,835 = 24,35$$

$$Y_2 = a_0 + a_2 \cdot (-1) + a_3 \cdot (-1) = 30,665 - 8,165 - 1,835 = 20,665$$

$$Y_3 = a_0 + a_2 \cdot (+1) + a_3 \cdot (-1) = 30,665 + 8,165 - 1,835 = 36,995$$

$$Y_4 = a_0 + a_2 \cdot (+1) + a_3 \cdot (+1) = 30,665 + 8,165 + 1,835 = 40,665$$

и са нанесени в таблицата.

Прави се проверка за адекватност на получения модел с помощта на критерия на Фишер, като предварително се определя дисперсията за адекватност:

$$S_{\text{адекв}}^2 = \frac{n}{m-l} \sum_{j=1}^m (\bar{y}_j - Y_j)^2 = \frac{3}{4-3} [(25-24,35)^2 + (20-20,665)^2 + (37,66-36,995)^2 + (40-40,665)^2] = 5,24$$

$$F = \frac{S_{\text{адекв}}^2}{S_{\text{възп}}^2} = \frac{5,24}{1,27} = 4,126$$

$$F_{\alpha, m_1, m_2} = F_{0,05;1;8} = 5,318 \quad \text{при } \alpha=0,05; m_1=m-l=4-3=1; m_2=m(n-1)=4(3-1)=8$$

Тъй като $F < F_{0,05;1;8}$ то адекватността на модела се потвърждава.

8. Планове от втори порядък

Ако адекватността на модела за полином от първа степен не се потвърди, се преминава към полином от втора степен и се разработва план от втори порядък.

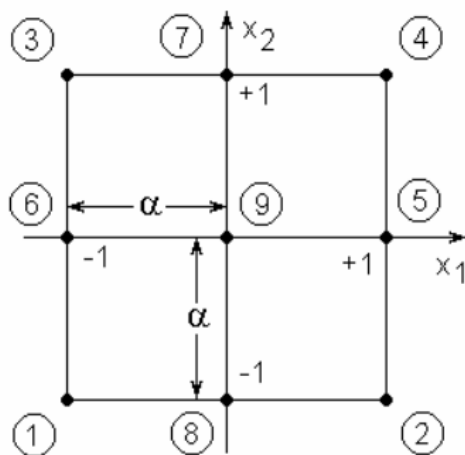
$$Y = a_0 + \sum_{i=1}^k a_i x_i + \sum_{i=1}^k a_{ii} x_i^2 + \sum_{i,u=1}^k a_{iu} x_i x_u + \dots$$

В този случай е необходимо всеки фактор да се варира на не по-малко от три нива. Броя на опитите при провеждане на пълен факторен експеримент е 3^k . така например при три фактора ($k=3$) броят на опитите е $m=27$, а при $k=5 \rightarrow m=243$. Във връзка с големия брой опити, необходим за реализирането на пълен факторен експеримент за планове от втори порядък, прилагането на пълен факторен експеримент е нецелесъобразно.

Намаляване на броя на опитите е възможно, използвайки така наречените композиционни планове, разработени от Бокс и Уилсън. При два фактора уравнението на регресия има вида:

$$Y=a_0+a_1x_1+a_2x_2+a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{12}x_1x_2$$

и броя на опитите е 9 – фиг.20.



фиг.20

При k фактора общия брой опити в матрицата на композиционния план ще бъде:

$$m=2^k+2k+m_0 \text{ при } k<5$$

$$m=2^{k-1}+2k+m_0 \text{ при } k>5.$$

където m_0 е броя на опитите в центъра на плана (точка 9).

Композиционен план за $k=2$ и $m_0=1$ е показан в табл.9

табл.9

№ на опита	x_0	x_1	x_2	$x_1 x_2$	x_1^2	x_2^2	Резултат y_i
1	+1	-1	-1	+1	+1	+1	y_1
2	+1	+1	-1	-1	+1	+1	y_2
3	+1	-1	+1	-1	+1	+1	y_3
4	+1	+1	+1	+1	+1	+1	y_4
5	+1	$+\alpha$	0	0	α^2	0	y_5
6	+1	$-\alpha$	0	0	α^2	0	y_6
7	+1	0	$+\alpha$	0	0	α^2	y_7
8	+1	0	$-\alpha$	0	0	α^2	y_8
9	+1	0	0	0	0	0	y_9

Този план не е ортогонален тъй като сумата от произведенията на елементите в кои да са два стълба от матрицата не е равно на нула:

$$\sum_{j=1}^m x_{0j}x_{ij} \neq 0; \quad \sum_{j=1}^m x_{ij}^2 x_{uj}^2 \neq 0$$

което създава значителни трудности при определяне на коефициентите в уравнението на регресия. Планът може да бъде приведен в ортогонален чрез въвеждане на нови променливи (преобразуване на квадратичните ефекти) и чрез подходящо избиране на величината α .

Въвеждат се нови променливи x'_{ij} .

$$x'_{ij} = x_{ij}^2 - \frac{\sum_{j=1}^m x_{ij}^2}{m} = x_{ij}^2 - x_i^{-2}$$

Тогава уравнението на регресия ще добие вида:

$$Y = a'_0 + \sum_{i=1}^k a_i x_i + \sum_{i,u=1}^k a_{iu} x_i x_u + \sum_{i=1}^k a'_{ii} x'_i$$

α се избира от табл.10 в зависимост от броя на факторите k и броя на опитите в центъра на плана m_0 .

табл.10

m_0	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
1	1,000	1,215	1,414	1,546
2	1,077	1,285	1,471	1,606
3	1,148	1,353	1,546	1,664
4	1,214	1,414	1,606	1,718
5	1,267	1,471	1,664	1,772
6	1,320	1,525	1,718	1,819
7	1,369	1,575	1,772	1,868
8	1,414	1,623	1,819	1,913
9	1,454	1,668	1,868	1,957
10	1,498	1,711	1,913	2,000

Ортогонален план от втори порядък при $k=2$ и $m_0=1$ е показан в табл.11

табл.11

№ на опита	x ₀	x ₁	x ₂	x ₁ x ₂	x ₁ '	x ₂ '	Резултат y _i
1	+1	-1	-1	+1	+1/3	+1/3	y ₁
2	+1	+1	-1	-1	+1/3	+1/3	y ₂
3	+1	-1	+1	-1	+1/3	+1/3	y ₃
4	+1	+1	+1	+1	+1/3	+1/3	y ₄
5	+1	α= +1	0	0	+1/3	-2/3	y ₅
6	+1	α= -1	0	0	+1/3	-2/3	y ₆
7	+1	0	α= +1	0	-2/3	+1/3	y ₇
8	+1	0	α= -1	0	-2/3	+1/3	y ₈
9	+1	0	0	0	-2/3	-2/3	y ₉

В тази таблица $x'_{ij} = x_{ij}^2 - \frac{\sum_{j=1}^9 x_{ij}^2}{9} = x_{ij}^2 - \frac{2}{3}$

Коефициентите в уравнението на регресия се определят от зависимостите:

$$a_i = \frac{\sum_{j=1}^m x_{ij} y_{ij}}{\sum_{j=1}^m x_{ij}^2}$$

$$a'_{ii} = \frac{\sum_{j=1}^m x'_{ij} y_j}{\sum_{j=1}^m x'^2_{ij}}$$

$$a_{iu} = \frac{\sum_{j=1}^m (x_{ij} x_{uj}) y_j}{\sum_{j=1}^m (x_{ij} x_{iu})^2}$$

където i е номера на колоната в матрицата на планиране, а j е номера на реда в матрицата на планиране.

Следва да се отбележи, че коефициентите в уравнението на регресия, получени от този план са определени с различна точност. Дисперсиите на коефициентите са съответно:

$$S_{ai}^2 = \frac{S_{\text{възпр}}^2}{\sum_{j=1}^m x_{ij}^2}; \quad S_{a_{ii}}^2 = \frac{S_{\text{възпр}}^2}{\sum_{j=1}^m x_{ij}^{'2}}; \quad S_{a_{iu}}^2 = \frac{S_{\text{възпр}}^2}{\sum_{j=1}^m (x_{ij} \cdot x_{uj})^2}$$

Уравнението на регресия след преобразуването на колоните с квадратични ефекти се получава във вида:

$$Y = a_0' + \sum_{i=1}^k a_i' x_i + \sum_{i,u=1}^k a_{iu}' x_i x_u + \sum_{i=1}^k a_{ii}' (x_i^2 - \bar{x}_i^2)$$

За обратно преобразуване в обичайната форма следва да се премине от коефициенти a_0' към коефициенти a_0 :

$$a_0 = a_0' - \sum a_{ii}' \bar{x}_i^2$$

Дисперсията на коефициента a_0 се определя от зависимостта:

$$S_{a_0}^2 = S_{a_0'}^2 + \sum \bar{x}_i^2 S_{a_{ii}}^2$$

За намиране на дисперсията на възпроизводимост $S_{\text{възпр}}$ се правят няколко опита m_0 в центъра на плана.

$$S_{\text{възпр}}^2 = \frac{1}{m_0 - 1} \sum_{i=1}^{m_0} (y_{0i} - \bar{y}_0)^2 = \frac{1}{m_0 - 1} \left[\sum_{i=1}^{m_0} y_{0i}^2 - \frac{1}{m_0} \left(\sum_{i=1}^{m_0} y_{0i} \right)^2 \right]$$

Знаейки дисперсията на възпроизводимост, се прави проверка за значимост на коефициентите на уравнението на регресия и адекватност на това уравнение.

Значимостта на коефициентите се проверява по критерия на Стюdent $t_i = |a_i|/S_{a_i}$. Коефициентът е значим ако $t_i > t_{\alpha, m_1}$, т.е. ако $|a_i| > t_{\alpha, m_1} \cdot S_{a_i}$, където m_1 е броя на степените на свобода на дисперсията на възпроизводимост.

Адекватността на уравнението на регресия се проверява по критерия на Фишер, като за целта се определя дисперсията за адекватност:

$$S_{\text{адекв}}^2 = \frac{n}{m-l} \sum_{j=1}^m (y_j - Y_j)^2$$

където l е броя на коефициентите в уравнението на регресия

$$F = \frac{S_{\text{адекв}}^2}{S_{\text{възпр}}^2}$$

Ако $F < F_{\alpha, m_1, m_2}$ за съответните степени на свобода на дисперсията на адекватност $m_1 = m - l$, и степени на свобода на дисперсията на възпроизводимост $m_2 = m_0 - 1$, и при зададено ниво на значимост α , то моделът се счита за адекватен.

Пример: Изследване на причините за възникване на дефекти в горещовалцовани стоманени листове. Известно е, че голяма част от дефектите се дължат на заготовката. Съществува достатъчно тясна връзка между някой от параметрите на отлятата стомана и дефектите във валцованите листове. Дефектността се изразява в относителни единици $y, \%$ (площ на дефектите към обща площ). Прието е, че най-съществено влияят два фактора: скорост на изгаряне на въглерода в периода на кипене на рудата $X_1, \%/ч$, и времето за отливане на стоманата X_2 , мин. Нивата на вариране на факторите са дадени в таблицата:

Нива на факторите	Фактори	
	$X_1, \%/ч$	X_2 , мин.
Основно (0)	0,35	5,5
Долно (-1)	0,20	3,5
Горно (+1)	0,50	7,5
Интервал на вариране	0,15	2,0

Кодирането на нивата на факторите с извършено по зависимостта: $x_{ij} = \frac{(X_{ij} - \bar{X}_j)}{\Delta X_j}$

За провеждане на експеримента се използва план от втори порядък с три опита в центъра на плана. От табл.10 при брой на факторите $k=2$ и $m_0=3$ се определя $\alpha=1,148 \approx 1,15$. Матрицата на планиране е дадена в долната таблица.

№ на опита	Фактори (кодирани стойности)		Фактори (натурални стойности)		Резултат
	x_1	x_2	$X_1, \%/ч$	X_2 , мин	
1	-1	-1	0,20	3,5	0,36
2	+1	-1	0,50	3,5	0,51
3	-1	+1	0,20	7,5	1,33
4	+1	+1	0,50	7,5	1,51
5	$\alpha = +1.15$	0	0,52	5,5	0,50
6	$\alpha = -1.15$	0	0,18	5,5	0,31
7	0	$\alpha = +1.15$	0,35	7,8	1,59
8	0	$\alpha = -1.15$	0,35	3,2	0,45
9	0	0	0,35	5,5	0,30
10	0	0	0,35	5,5	0,29
11	0	0	0,35	5,5	0,31

Натуралните стойности X_1 и X_2 при код $\alpha = +1.15$ и $\alpha = -1.15$ се определят от зависимостта за кодиране:

$$x_{ij} = \frac{(X_{ij} - \bar{X}_j)}{\Delta X_j};$$

$$+1,15 = \frac{X_{15} - 0,35}{0,15}, \text{ от където } X_{15} = 1,15 \cdot 0,15 + 0,35 = 0,52$$

Аналогично: $X_{16}=0,18$; $X_{27}=7,8$; $X_{28}=3,2$

Към матрицата на планиране добавяме фиктивна колона $x_0=+1$, необходима за определяне на свободния член a_0 в уравнението на регресия, допълнителна колона $x_{12}=x_1x_2$ и колони x_1^2 и x_2^2 , които преобразуваме в x_1' и x_2' .

№ на опита	Фактори						Резултат	
	x_0	x_1	x_2	$x_{12}=x_1x_2$	x_1'	x_2'	y_j	Y_j
1	+1	-1	-1	+1	+0,4	+0,4	0,36	0,366
2	+1	+1	-1	-1	+0,4	+0,4	0,51	0,526
3	+1	-1	+1	-1	+0,4	+0,4	1,33	1,346
4	+1	+1	+1	+1	+0,4	+0,4	1,51	1,506
5	+1	+1,15	0	0	+0,7225	-0,6	0,50	0,507
6	+1	-1,15	0	0	+0,7225	-0,6	0,31	0,323
7	+1	0	+1,15	0	-0,6	+0,7225	1,59	1,587
8	+1	0	-1,15	0	-0,6	+0,7225	0,45	0,460
9	+1	0	0	0	-0,6	-0,6	0,30	0,296
10	+1	0	0	0	-0,6	-0,6	0,29	0,296
11	+1	0	0	0	-0,6	-0,6	0,31	0,296

$$x_{ij}' = x_{ij}^2 - \frac{\sum_{j=1}^{11} x_{ij}^2}{11}$$

$$x_{11}' = x_{11}^2 - \frac{\sum_{j=1}^{11} x_{1j}^2}{11} = (-1)^2 - \frac{(-1)^2 + (+1)^2 + (-1)^2 + (+1)^2 + (1,15)^2 + (-1,15)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2}{11} = 0,4$$

Аналогично се определят и останалите стойности x_{ij}' .

В горната таблица освен получените от експеримента стойности y_j са нанесени и стойностите Y_j , получени по намерения математичен модел (уравнението на регресия).

Уравнението на регресия има вида:

$$Y = a_0' + a_1x_1 + a_2x_2 + a_{12}x_1x_2 + a_{11}'x_{11}' + a_{22}'x_{22}'$$

За намиране на коефициентите в уравнението на регресия се съставят две допълнителни таблици, в които са представени междинни резултати, необходими за изчисления по формулите:

$$a_i = \frac{\sum_{j=1}^m x_{ij} y_j}{\sum_{j=1}^m x_{ij}^2}; a_{ii}' = \frac{\sum_{j=1}^m x_{ij}' y_j}{\sum_{j=1}^m x_{ij}'^2}; a_{iu} = \frac{\sum_{j=1}^m (x_{ij} x_{uj}) y_j}{\sum_{j=1}^m (x_{ij} x_{iu})^2}$$

№ на опита	x_0y	x_1y	x_2y	$x_{12}y$	$x_1'y$	$x_2'y$
1	0,36	-0,36	-0,36	0,36	0,144	0,144
2	0,51	0,51	-0,51	-0,51	0,204	0,204
3	1,33	-1,33	1,33	-1,33	0,532	0,532
4	1,51	1,51	1,51	1,51	0,604	0,604
5	0,5	0,575	0	0	0,36125	-0,3
6	0,31	-0,3565	0	0	0,223975	-0,186
7	1,59	0	1,8285	0	-0,954	1,148775
8	0,45	0	-0,5175	0	-0,27	0,325125
9	0,3	0	0	0	-0,18	-0,18
10	0,29	0	0	0	-0,174	-0,174
11	0,31	0	0	0	-0,186	-0,186
$\sum x_{ij} y_{ij}$	7,46	0,5485	3,281	0,03	0,305225	1,9319

№ на опита	$(x_0)^2$	$(x_1)^2$	$(x_2)^2$	$(x_{12})^2$	$(x_1')^2$	$(x_2')^2$
1	1	1	1	1	0,16	0,16
2	1	1	1	1	0,16	0,16
3	1	1	1	1	0,16	0,16
4	1	1	1	1	0,16	0,16
5	1	1,3225	0	0	0,522006	0,36
6	1	1,3225	0	0	0,522006	0,36
7	1	0	1,3225	0	0,36	0,522006
8	1	0	1,3225	0	0,36	0,522006
9	1	0	0	0	0,36	0,36
10	1	0	0	0	0,36	0,36
11	1	0	0	0	0,36	0,36
$\sum x_{ij}^2$	11	6,645	6,645	4	3,484013	3,484013

$$a_0' = 7,46/11 = 0,678182$$

$$a_1 = 0,5485/6,645 = 0,082543$$

$$a_2 = 3,281/6,645 = 0,493755$$

$$a_{12} = 0,03/4 = 0,0075$$

$$a_{11}' = 0,305225/3,484013 = 0,087607$$

$$a_{22}' = 1,9319/3,484013 = 0,554504$$

Прави се проверка за значимост на коефициентите по критерия на Стюдент $t_i = |a_i|/S_{ai}$

$$S_{ai}^2 = \frac{S_{\text{възпр}}^2}{\sum_{j=1}^m x_{ij}^2}; \quad S_{aii}'^2 = \frac{S_{\text{възпр}}^2}{\sum_{j=1}^m x_{ij}'^2}; \quad S_{aiu}^2 = \frac{S_{\text{възпр}}^2}{\sum_{j=1}^m (x_{ij} \cdot x_{uj})^2}$$

За определяне на дисперсиите S_{ai}^2 се определя дисперсията на възпроизводимост от трите паралелни опита в центъра на плана ($j=9,10$ и 11).

$$S_{\text{възпр}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^3 (y_{0i} - \bar{y}_0)^2}{3-1} = \frac{1}{3-1} \left[\sum_{i=1}^3 y_{0i}^2 - \frac{1}{3} \left(\sum_{i=1}^3 y_{0i} \right)^2 \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left[(0,30^2 + 0,29^2 + 0,31^2) - \frac{1}{3} (0,30 + 0,39 + 0,31)^2 \right] = 0,0001$$

$$S_{a_0'}^2 = 0,0001/11 = 9,09091 \cdot 10^{-6}; \quad S_{a_0'} = \sqrt{9,09091 \cdot 10^{-6}} = 0,003015$$

$$S_{a_1}^2 = S_{a_2}^2 = 0,0001/6,645 = 1,5 \cdot 10^{-5}; \quad S_{a_1} = S_{a_2} = 0,003879$$

$$S_{a_{12}}^2 = 0,0001/4 = 2,5 \cdot 10^{-5}; \quad S_{a_{12}} = 0,005$$

$$S_{a_{11}'}^2 = S_{a_{22}'}^2 = 0,0001/3,484013 = 2,87 \cdot 10^{-5}; \quad S_{a_{11}'} = S_{a_{22}'} = 0,005357$$

Тогава критерия на Стюdent за всеки от коефициентите ще бъде:

$$t_{a_0} = |a_0'| / S_{a_0'} = 0,678182 / 0,003015 = 224,9$$

$$t_{a_1} = 0,082543 / 0,003879 = 21,2$$

$$t_{a_2} = 0,493755 / 0,003879 = 127,3$$

$$t_{a_{12}} = 0,0075 / 0,005 = 1,5$$

$$t_{a_{11}'} = 0,087607 / 0,005357 = 16,3$$

$$t_{a_{22}'} = 0,554504 / 0,005357 = 103,5$$

Тъй като $t_{0,05;3-1} = 4,3$ ($\text{TINV}(0,05;2) = 4,302656$) то само коефициента a_{12} не е значим. Тогава уравнението на регресия може да се запише във вида:

$$Y = 0,68 + 0,08 \cdot x_1 + 0,49 \cdot x_2 + 0,09 \cdot x_1' + 0,55 \cdot x_2'$$

Стойностите на Y_j , получени по това уравнение са нанесени в таблицата на плана на експеримента. Съпоставяйки получените стойности Y_j по уравнението на регресия с опитните данни y_j , се определя дисперсията за адекватност, отчитайки, че броя на значимите коефициенти в уравнението на регресия е равен на пет:

$$S_{\text{адекв}}^2 = \frac{\sum_{j=1}^{11} (y_j - Y_j)^2}{11-5} =$$

$$= \frac{1}{6} [(0,36 - 0,366)^2 + (0,51 - 0,526)^2 + (1,33 - 1,346)^2 + \dots + (0,31 - 0,296)^2] = 0,00019$$

Адекватността на уравнението на регресия се проверява по критерия на Фишер.

$$F = \frac{S_{\text{адекв}}^2}{S_{\text{възпр}}^2} = \frac{0,00019}{0,0001} = 1,9$$

$F_{\alpha, m_1=6; m_2=2} = 19,3$ ($\text{FINV}(0,05;6;2) = 19,32949$), където $m_1 = 11-5=6$; $m_2 = 3-1=2$.

Тъй като $F < F_{\alpha, m_1=6; m_2=2}$ то уравнението на регресия може да се счита за адекватно.

Отчитайки, че стойностите на x_1' и x_2' са:

$$x_1' = x_1^2 - \frac{\sum_{j=1}^{11} x_{1j}^2}{11} = x_1^2 - 0,6; \quad x_2' = x_2^2 - \frac{\sum_{j=1}^{11} x_{2j}^2}{11} = x_2^2 - 0,6$$

то окончателно уравнението на регресия може да се запише във вида:

$$\begin{aligned}
Y &= 0,68 + 0,08 \cdot x_1 + 0,49 \cdot x_2 + 0,09 \cdot (x_1^2 - 0,6) + 0,55 \cdot (x_2^2 - 0,6) = \\
&= (0,68 - 0,09 \cdot 0,6 - 0,55 \cdot 0,6) + 0,08 \cdot x_1 + 0,49 \cdot x_2 + 0,09 \cdot x_1^2 + 0,55 \cdot x_2^2 = \\
&= 0,29 + 0,08 \cdot x_1 + 0,49 \cdot x_2 + 0,09 \cdot x_1^2 + 0,55 \cdot x_2^2
\end{aligned}$$

Ако се анализира полученото уравнение за екстремум спрямо x_1 и x_2 :

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = 0,08 + 2 \cdot 0,09 \cdot x_1 = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = 0,49 + 2 \cdot 0,55 \cdot x_2 = 0$$

Решавайки тези съотношения, се намира, че екстремум ще има в точката с координати $x_1 = -0,08 / (2 \cdot 0,09) = -0,44$ и $x_2 = -0,55 / (2 \cdot 0,49) = -0,44$. Натуралните стойности на факторите X_1 и X_2 могат да бъдат намерени от зависимостите, използвани за кодирането:

$$\frac{X_1 - 0,35}{0,15} = x_1 = -0,44 ; \quad X_1 = 0,35 - 0,44 \cdot 0,15 = 0,28 \text{ \% / ч}$$

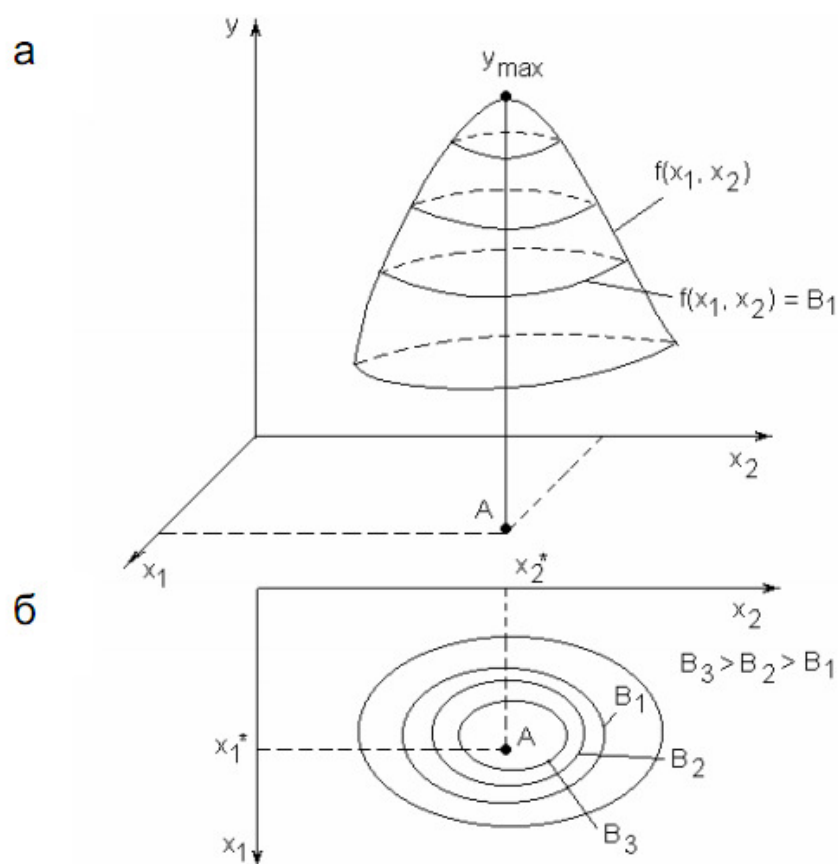
$$\frac{X_2 - 5,5}{2} = x_2 = -0,44 ; \quad X_2 = 5,5 - 0,44 \cdot 2 = 4,6 \text{ мин.}$$

При стойности на факторите $X_1 = 0,28 \text{ \% / ч}$ и $X_2 = 4,6 \text{ мин}$ дефектността ще бъде минимална и ще бъде от порядъка на 0,16%:

$$Y = 0,29 + 0,08 \cdot (-0,44) + 0,49 \cdot (-0,44) + 0,09 \cdot (-0,44)^2 + 0,55 \cdot (-0,44)^2 = 0,16$$

9. Планиране на експеримента в търсене на оптимални условия

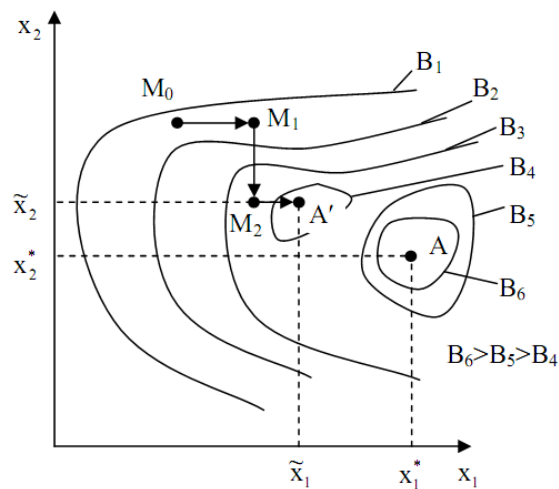
В много случаи от инженерната практика е необходимо да се намерят такива числени стойности на влияещите фактори, при които изходният параметър достига екстремни стойности (максимум или минимум). Графическа интерпретация на такава задача при два фактора x_1 и x_2 е дадена на фиг.21. Точката А съответства на оптималните стойности на факторите x_1^* и x_2^* , при които се осигурява $y_{\max}$.



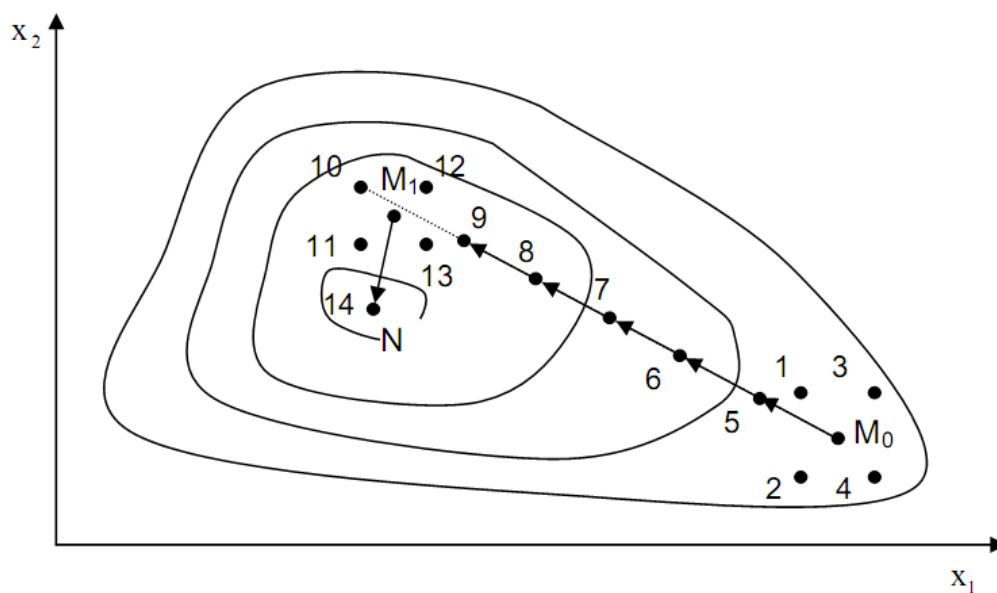
фиг.21

Методите за търсене на оптимални условия се отнасят към итерационните методи, при което процесът на оптимизация се разбива на стъпки, като на всяка стъпка се извършват поредица опити, на базата на които се определя по какъв начин да се изменят стойностите на влияещите фактори, че да се получи подобрение на резултата y . При това на всяка стъпка се получава информация, която се използва за избора на следващата стъпка. Съществуват редица методи за постъпкова оптимизация, но тук ще бъдат разгледани само някои от тях.

При метода за *покоординатна оптимизация* (представен за двумерен случай на фиг.22) търсенето на оптимум се осъществява с последователно вариране на всеки от факторите. Първо се променят стойностите само на един фактор x_1 (останалите остават неизменни), до тогава докато не пресане нарастването на реакцията y (т M_1). След това се променят стойностите на втория фактор x_2 (останалите остават неизменни) и така процедурата се повтаря. Този метод е много прост, но при повече влияещи фактори изисква значителен брой опити. Освен това при някои зависимости $y=f(x_1, \dots, x_k)$ този метод може да доведе до неправилен резултат.



фиг. 22



фиг.23

Метод на градацията (градиентен метод) – при този метод стъпковото движение се осъществява в направление на най бързото нарастване на функцията y , т.е. по направление на градиента $\text{grad } y(x_1, x_2)$, като направлението се коригира не след всяка стъпка, а при достигане на локален екстремум на функцията (фиг.23).

Нека точка M_0 е център на план 2^2 (пълнен факторен експеримент), а координатите на отделните опити съответстват на точките 1, 2, 3 и 4. По резултата от така проведения експеримент могат да се определят коефициентите на линейното уравнение на регресия $Y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2$. Градиента на функцията в тази точка се определя като:

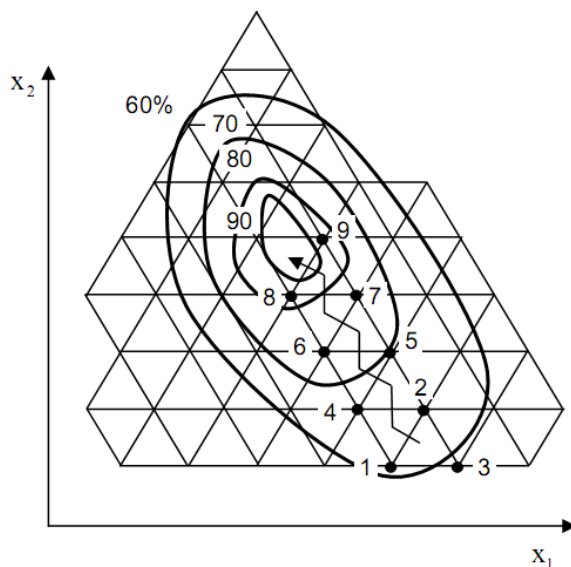
$$\text{grad } y = \frac{\partial Y}{\partial x_1} \vec{i} + \frac{\partial Y}{\partial x_2} \vec{j},$$

където $\vec{i}$ и $\vec{j}$ са единични вектори в направление на координатните оси.

Следователно, за движение по градиента е необходимо да се изменят факторите пропорционално на техните коефициенти на регресия и в страна, съответстваща на знака на коефициента. При достигане на локален екстремум (т.М₁) се извършва нов пълен факторен експеримент с план 2² за намиране на ново направление на градиента и процедурата се повтаря.

Симплекс метод – при този метод се използва специален план на експеримента във вид на симплекс. Симплекс – това е изпъкнал многоъгълник, който в k-мерно пространство има k+1 върха. Например в двуфакторно пространство (k=2) симплекс е триъгълник, в трифакторно пространство (k=3) – симплекс е тетраедер и т.н. Координатите на върховете на симплекса са стойностите на факторите в отделните опити.

След построяване на изходния симплекс и провеждане на опити при стойности на факторите, съответстващи на координатите на неговите върхове, се анализират резултатите и се избира върха на симплекса, в който е получена най-малката (най-лошата) стойност на реакцията y. За придвижване към оптимума е необходимо да се проведе опит в нова точка, явяваща се огледален образ на точката с най-лош резултат.



фиг.24

На фиг.24 е показано геометрично изображение на симплекс метода при два фактора x_1 и x_2 (k=2). При провеждане на опити 1, 2 и 3 най-лош резултат дава опит 3. Следващият опит се извършва в точка 4, която образува с точки 1 и 2 нов симплекс. След сравняване на резултатите от опити 1, 2 и 4, най-лош резултат е получен в т.1, поради което тази точка в

новия симплекс се заменя с огледалното изображение – т.5 и т.н. докато не се достигне почти стационарна област. Следва да се отбележи, че само в началото се правят $k+1$ опити, а след това на всяка стъпка се провежда само по още един опит, условията за който се избират на базата на предишните резултати.

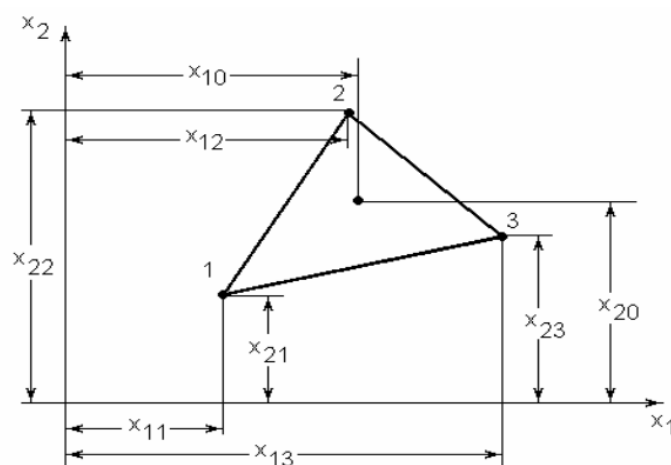
За построяване на началния симплекс, координатите за всеки опит може да се определят по формулата:

$$x_{ij}=x_{i0}+C_{ij}\Delta x_i;$$

където x_{i0} – координатите на центъра на началния симплекс; Δx_i – интервалът на вариране на i –тия фактор; C_{ij} – коефициент, който може да се избере от табл.12.

Табл.12

Номер на опита j	Коефициенти C_{ij}		
	Фактори i		
	x_1	x_2	x_3
1	k_1	k_2	k_3
2	$-R_1$		
3	0	$-R_2$	
4	0	0	$-R_3$
$k_i = \sqrt{\frac{1}{2i(i+1)}}$		$R_i = \sqrt{\frac{i}{2(i+1)}}; \quad i=1,2,\dots,k$	



фиг. 25

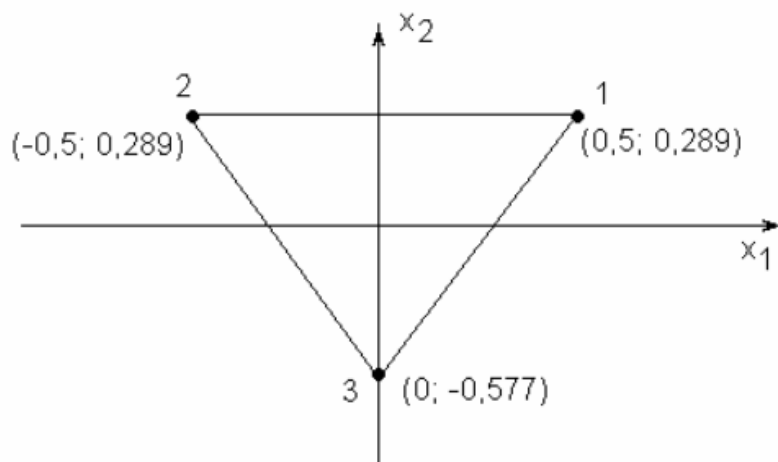
Например, ако е необходимо да се състави симплекс план за два фактора, то в началото се правят три опита със следните координати (фиг.25):

1-ви опит $\rightarrow x_{11}=x_{10}+k_1\Delta x_1$; $x_{21}=x_{20}+k_2\Delta x_2$

2-ри опит $\rightarrow x_{12}=x_{10}-R_1\Delta x_1$; $x_{22}=x_{20}+k_2\Delta x_2$

3-ти опит $\rightarrow x_{13}=x_{10}+0$; $x_{23}=x_{20}-R_2\Delta x_2$

Ако $x_{10}=0$ и $x_{20}=0$, а $\Delta x_1=\Delta x_2=1$, то координатите на опитите (фиг.26) ще бъдат: опит 1 (0,5;0,289), опит 2 (-0,5;0,289) и опит 3 (0;-0,577).



фиг.26

За определяне на условията за провеждане на опита в огледалната точка (координатите на новия връх на симплекса) се използва формулата:

$$x_{in} = 2\left(\frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k+1} x_{ij}\right) - x_{i_3}; \quad j \neq i_3$$

където x_{in} – координатите на новата точка (новият връх) на симплекса; x_{i_3} – координатите на заменената точка (координатите на върха на симплекса с най-лош резултат); $\frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k+1} x_{ij}$ – средната стойност от координатите на всички върхове на симплекса освен заменения.

Критерии за приключване на процеса на търсене на оптимум могат да бъдат:

- Разликите в стойностите на реакцията y във върховете на симплекса са станали по-малки от предварително зададена стойност. Това означава или влизане в “почти стационарна” област близо до оптимума, или достигане на участък във вид на “плато”.
- Циклично движение на симплекса около един от неговите върхове в подължение на няколко стъпки. Може да се очаква, че търсения оптимум е разположен вътре в областта, обхваната от циркулацията на симплекса. В този случай се препоръчва да се намалят размерите на симплекса, т.е. разстоянието между върховете, и да продължи търсенето до уточняване на координатите на търсения оптимум.

Пример: [5] Нека обекта да има свойства, описвани с уравнението $y=4+12x_1-x_1^2+30x_2-3x_2^2$

Да се намери екстремум на функцията, използвайки симплекс-метод. Избират се основните нива на факторите x_1 и x_2 . Предполага се, че екстремума се намира близо до стойностите $x_{10}=3$ и $x_{20}=-1$, които се приемат за основни нива. Интервалът на вариране се приема да бъде $\Delta x_1=1$ и $\Delta x_2=-1,5$.

$$k_1 = \sqrt{\frac{1}{2i(i+1)}} = \sqrt{\frac{1}{2 \cdot 1 \cdot (1+1)}} = 0,5 \quad k_2 = \sqrt{\frac{1}{2i(i+1)}} = \sqrt{\frac{1}{2 \cdot 2 \cdot (2+1)}} = 0,289$$

$$R_1 = \sqrt{\frac{i}{2(i+1)}} = \sqrt{\frac{1}{2 \cdot (2+1)}} = 0,5$$

$$R_2 = \sqrt{\frac{i}{2(i+1)}} = \sqrt{\frac{2}{2 \cdot (2+1)}} = 0,577$$

Намират се координатите на първите три опита:

Връх 1: $x_{11}=x_{10}+k_1\Delta x_1=3+0,5 \cdot 1=3,5$; $x_{21}=x_{20}+k_2\Delta x_2=-1+0,289 \cdot 1,5=-0,565$

Връх 2: $x_{12}=x_{10}-R_1\Delta x_1=3-0,5 \cdot 1=2,5$; $x_{22}=x_{20}+k_2\Delta x_2=-1+0,289 \cdot 1,5=-0,565$

Връх 3: $x_{13}=x_{10}+0=3+0=3$; $x_{23}=x_{20}-R_2\Delta x_2=-1-0,577 \cdot 1,5=-1,865$

Замествайки намерените координати в уравнението се получават следните резултати $y_1=15,84$; $y_2=9,78$; $y_3=-35,5$. Най-лошият резултат е $y_3=-35,5$. Следователно условията на опит 3 трябва да се заменят. Геометричната траектория на движение е показана на фиг.27.

Изчисляват се координатите на връх 4

$$x_{14} = 2\left(\frac{1}{k} \sum x_{ij}\right) - x_{i3} = 2\left[\frac{1}{2}(x_{11} + x_{12})\right] - x_{13} = 2\left[\frac{1}{2}(3,5 + 2,5)\right] - 3 = 3;$$

$$x_{24} = 2\left[\frac{1}{2}(-0,565 - 0,565)\right] - (-1,865) = 0,735$$

Резултат: $y_4=52,1$

Сравнявайки резултатите $y_1=15,84$; $y_2=9,78$; и $y_4=52,1$ най-лош резултат е y_2 . Изчисляват се координатите на връх 5

$$x_{15}=4; \quad x_{25}=0,735; \quad y_5=57,1$$

Сравнявайки резултатите $y_1=15,84$; $y_4=52,1$; и $y_5=57,1$ заменя се връх 1 и се изчисляват координатите на връх 6.

$$x_{16}=3,5; \quad x_{26}=2,035; \quad y_6=82,6$$

По нататък се получават координати за връх 7 – (4,5;2,035), за връх 8 – (4;3,3), за връх 9 – (5;3,3), за връх 10 – (4,5;4,6), за връх 11 – (5,5;4,6) и резултатите от последните три опита са $y_9=105$; $y_{10}=113$; $y_{11}=112,32$.

Координатите на връх 12 ще бъдат:

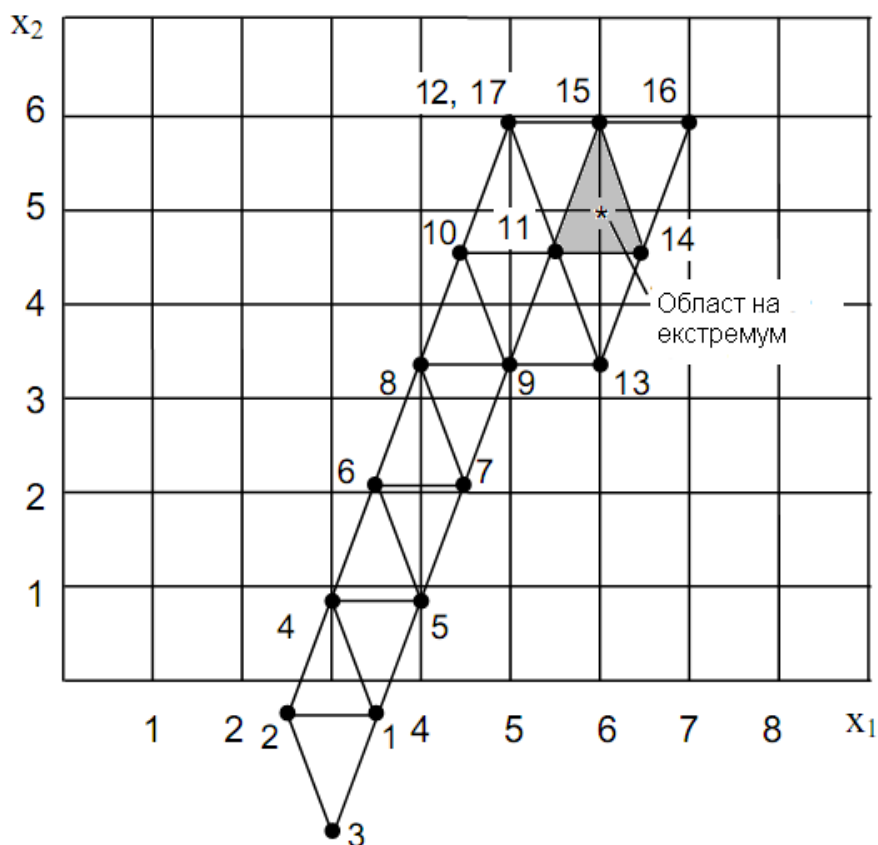
$$x_{112} = 2\left[\frac{1}{2}(4,5 + 5,5) - 5\right] = 5; \quad x_{212} = 2\left[\frac{1}{2}(4,6 + 4,6) - 3,3\right] = 5,9; \quad y_{12}=111$$

y_{12} дава по-лош резултат от y_{10} и y_{11} , поради което се връщаме на предишния симплекс с върхове 9, 10 и 11 и се избира по-лошият резултат, без да се обръща внимание на опит 9. Следователно трябва да се замени връх 10. Намираме се координатите на връх 13.

$$x_{113} = 2\left[\frac{1}{2}(5 + 5,5) - 4,5\right] = 6; \quad x_{213} = 2\left[\frac{1}{2}(3,3 + 4,6) - 4,6\right] = 3,3; \quad y_{13}=105$$

В новия симплекс 9 (5;3,3); 11 (5,5;4,6) и 13 (6;3,3) най-лош е резултата в опита 9 и се заменя връх 9.

$$x_{114} = 2\left[\frac{1}{2}(5,5 + 6) - 5\right] = 6,5; \quad x_{214} = 2\left[\frac{1}{2}(4,6 + 3,3) - 3,3\right] = 4,6; \quad y_{14}=114,21$$



фиг.27

Резултатите от опити 11, 13 и 14 са $y_{11}=112,32$; $y_{13}=106$ и $y_{14}=114,21$. Заменя се връх 13.

$$x_{115} = 2\left[\frac{1}{2}(5,5 + 6,5) - 6\right] = 6; \quad x_{215} = 2\left[\frac{1}{2}(4,6 + 4,6) - 3,3\right] = 5,9; \quad y_{15}=112$$

Получава се по лош резултат отколкото от опити 11 и 14. Затова се заменя връх 11.

$$x_{116} = 2\left[\frac{1}{2}(6,5 + 6) - 5,5\right] = 7; \quad x_{216} = 2\left[\frac{1}{2}(4,6 + 5,9) - 4,6\right] = 5,9; \quad y_{15}=111$$

Това също е по-лош резултат поради което в симплекса 11, 14 и 15 се заменя връх 14.

$$x_{117} = 2\left[\frac{1}{2}(5,5 + 6) - 6,5\right] = 5; \quad x_{217} = 2\left[\frac{1}{2}(4,6 + 5,9) - 4,6\right] = 5,9; \quad y_{17}=111$$

Получен е отново лош резултат. Следователно екстремумът се намира вътре в този симплекс. Ако с точност до стъпката на вариране резултатът ни устройва, то за координати на екстремум може да се приемат $x_1=6,5$ и $x_2=4,6$ при които $y=114,21$. Ако е необходимо определянето на екстремума с по-висока точност следва да се намали интервала на вариране.

Приложение

Статистически функции в Excel

AVERAGE - Средноаритметична стойност
CHIDIST - Едностранныя вероятност на разпределението хи-квадрат
CHIINV - Обратната функция на едностранныя вероятност за хи-квадрат разпределението
CONFIDENCE - Доверителния интервал за средната стойност на генерална съвкупност
CORREL - Коефициент на корелация между два набора данни
COVAR - Ковариацият
DEVSQ - Сумата от квадратите на отклоненията
FDIST - Вероятностното F разпределение
FINV - Обратното на вероятностното F разпределение
FISHER - Трансформация на Фишер
FORECAST - Стойност от линейна тенденция
FTEST - Резултат от F-тест
LINEST - Параметрите на линейна тенденция
MEDIAN - Медиана
MODE - Мода
NORMSDIST - Стандартното нормално кумулативно разпределение
NORMSINV - Обратното на стандартното нормално кумулативно разпределение
PERCENTILE - Процентил
SLOPE - Наклон на линията на линейна регресия
STDEV - Стандартното отклонение на базата на извадка
STDEVP - Стандартното отклонение на базата на цялата генерална съвкупност
STEYX - Стандартната грешка на прогнозираната стойност на y за всяко x в регресията
TDIST - t-разпределение на Стюдънт
TINV - Обратното на t-разпределението на Стюдънт
TREND - Стойности от линейна тенденция
TTEST - Вероятността, свързана с t-теста на Стюдънт
VAR - Дисперсия на базата на извадка
VARP - Дисперсия на базата на цялата генерална съвкупност
ZTEST - Едностранныя стойност на вероятност на z-тест

<http://office.microsoft.com/bg-bg/excel-help/HP010079190.aspx>

Двусторонние пределы $t_{\alpha, m}$ распределения Стьюдента (t-распределения)
в зависимости от уровня значимости α и числа степеней свободы m

m	α				
	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005
1	6,314	12,706	25,452	63,656	127,321
2	2,920	4,303	6,205	9,925	14,089
3	2,353	3,182	4,177	5,841	7,453
4	2,132	2,776	3,495	4,604	5,598
5	2,015	2,571	3,163	4,032	4,773
6	1,943	2,447	2,969	3,707	4,317
7	1,895	2,365	2,841	3,499	4,029
8	1,860	2,306	2,752	3,355	3,833
9	1,833	2,262	2,685	3,250	3,690
10	1,812	2,228	2,634	3,169	3,581
11	1,796	2,201	2,593	3,106	3,497
12	1,782	2,179	2,560	3,055	3,428
13	1,771	2,160	2,533	3,012	3,372
14	1,761	2,145	2,510	2,977	3,326
15	1,753	2,131	2,490	2,947	3,286
16	1,746	2,120	2,473	2,921	3,252
17	1,740	2,110	2,458	2,898	3,222
18	1,734	2,101	2,445	2,878	3,197
19	1,729	2,093	2,433	2,861	3,174
20	1,725	2,086	2,423	2,845	3,153
21	1,721	2,080	2,414	2,831	3,135
22	1,717	2,074	2,405	2,819	3,119
23	1,714	2,069	2,398	2,807	3,104
24	1,711	2,064	2,391	2,797	3,091
25	1,708	2,060	2,385	2,787	3,078
26	1,706	2,056	2,379	2,779	3,067
27	1,703	2,052	2,373	2,771	3,057
28	1,701	2,048	2,368	2,763	3,047
29	1,699	2,045	2,364	2,756	3,038
30	1,697	2,042	2,360	2,750	3,030
40	1,684	2,021	2,329	2,704	2,971
60	1,671	2,000	2,299	2,660	2,915
120	1,658	1,980	2,270	2,617	2,860

Квантили F_{α, m_1, m_2} распределения Фишера (F-распределения)
 для уровня значимости $\alpha=0,05$ в зависимости от числа степеней
 свободы m_1 и m_2

m_2	m_1															
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	30	40	60	120
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	236,8	238,9	240,5	241,9	243,9	245,9	250,1	251,1	252,2	253,3
2	18,5	19,0	19,1	19,2	19,3	19,3	19,3	19,3	19,3	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4
3	10,1	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,74	8,70	8,62	8,59	8,57	8,55
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,91	5,86	5,75	5,72	5,69	5,66
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,68	4,62	4,50	4,46	4,43	4,40
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,00	3,94	3,81	3,77	3,74	3,70
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,57	3,51	3,38	3,34	3,30	3,27
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,28	3,22	3,08	3,04	3,01	2,97
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,07	3,01	2,86	2,83	2,79	2,75
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,91	2,85	2,70	2,66	2,62	2,58
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,79	2,72	2,57	2,53	2,49	2,45
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,69	2,62	2,47	2,43	2,38	2,34
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,60	2,53	2,38	2,34	2,30	2,25
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,53	2,46	2,31	2,27	2,22	2,18
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,48	2,40	2,25	2,20	2,16	2,11
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,42	2,35	2,19	2,15	2,11	2,06
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,38	2,31	2,15	2,10	2,06	2,01
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,34	2,27	2,11	2,06	2,02	1,97
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,31	2,23	2,07	2,03	1,98	1,93
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,28	2,20	2,04	1,99	1,95	1,90
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,25	2,18	2,01	1,96	1,92	1,87
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,23	2,15	1,98	1,94	1,89	1,84
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27	2,20	2,13	1,96	1,91	1,86	1,81
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,18	2,11	1,94	1,89	1,84	1,79
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24	2,16	2,09	1,92	1,87	1,82	1,77
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,15	2,07	1,90	1,85	1,80	1,75
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25	2,20	2,13	2,06	1,88	1,84	1,79	1,73
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19	2,12	2,04	1,87	1,82	1,77	1,71
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18	2,10	2,03	1,85	1,81	1,75	1,70
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,09	2,01	1,84	1,79	1,74	1,68
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	2,00	1,92	1,74	1,69	1,64	1,58

Квантили $\chi^2_{\alpha, m}$ распределения Пирсона (χ^2 распределения)
в зависимости от уровня значимости α и числа степеней свободы m

m	α										
	0,995	0,99	0,975	0,95	0,9	0,5	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005
1	0,0000	0,0001	0,0009	0,0039	0,016	0,455	2,706	3,841	5,024	6,635	7,879
2	0,010	0,020	0,051	0,103	0,211	1,386	4,605	5,991	7,378	9,210	10,60
3	0,072	0,115	0,216	0,352	0,584	2,366	6,251	7,815	9,348	11,34	12,84
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,064	3,357	7,779	9,488	11,14	13,28	14,86
5	0,412	0,554	0,831	1,145	1,610	4,351	9,236	11,07	12,83	15,09	16,75
6	0,676	0,872	1,237	1,635	2,204	5,348	10,64	12,59	14,45	16,81	18,55
7	0,989	1,239	1,690	2,167	2,833	6,346	12,02	14,07	16,01	18,48	20,28
8	1,344	1,647	2,180	2,733	3,490	7,344	13,36	15,51	17,53	20,09	21,95
9	1,735	2,088	2,700	3,325	4,168	8,343	14,68	16,92	19,02	21,67	23,59
10	2,156	2,558	3,247	3,940	4,865	9,342	15,99	18,31	20,48	23,21	25,19
11	2,603	3,053	3,816	4,575	5,578	10,34	17,28	19,68	21,92	24,73	26,76
12	3,074	3,571	4,404	5,226	6,304	11,34	18,55	21,03	23,34	26,22	28,30
13	3,565	4,107	5,009	5,892	7,041	12,34	19,81	22,36	24,74	27,69	29,82
14	4,075	4,660	5,629	6,571	7,790	13,34	21,06	23,68	26,12	29,14	31,32
15	4,601	5,229	6,262	7,261	8,547	14,34	22,31	25,00	27,49	30,58	32,80
16	5,142	5,812	6,908	7,962	9,312	15,34	23,54	26,30	28,85	32,00	34,27
17	5,697	6,408	7,564	8,672	10,09	16,34	24,77	27,59	30,19	33,41	35,72
18	6,265	7,015	8,231	9,390	10,86	17,34	25,99	28,87	31,53	34,81	37,16
19	6,844	7,633	8,907	10,12	11,65	18,34	27,20	30,14	32,85	36,19	38,58
20	7,434	8,260	9,591	10,85	12,44	19,34	28,41	31,41	34,17	37,57	40,00
21	8,034	8,897	10,28	11,59	13,24	20,34	29,62	32,67	35,48	38,93	41,40
22	8,643	9,542	10,98	12,34	14,04	21,34	30,81	33,92	36,78	40,29	42,80
23	9,260	10,196	11,69	13,09	14,85	22,34	32,01	35,17	38,08	41,64	44,18
24	9,886	10,856	12,40	13,85	15,66	23,34	33,20	36,42	39,36	42,98	45,56
25	10,520	11,524	13,12	14,61	16,47	24,34	34,38	37,65	40,65	44,31	46,93
26	11,160	12,198	13,84	15,38	17,29	25,34	35,56	38,89	41,92	45,64	48,29
27	11,808	12,878	14,57	16,15	18,11	26,34	36,74	40,11	43,19	46,96	49,65
28	12,461	13,565	15,31	16,93	18,94	27,34	37,92	41,34	44,46	48,28	50,99
29	13,121	14,256	16,05	17,71	19,77	28,34	39,09	42,56	45,72	49,59	52,34
30	13,787	14,953	16,79	18,49	20,60	29,34	40,26	43,77	46,98	50,89	53,67
40	20,707	22,164	24,43	26,51	29,05	39,34	51,81	55,76	59,34	63,69	66,77
50	27,991	29,707	32,36	34,76	37,69	49,33	63,17	67,50	71,42	76,15	79,49
60	35,534	37,485	40,48	43,19	46,46	59,33	74,40	79,08	83,30	88,38	91,95
70	43,275	45,442	48,76	51,74	55,33	69,33	85,53	90,53	95,02	100,4	104,2
80	51,172	53,540	57,15	60,39	64,28	79,33	96,58	101,9	106,6	112,3	116,3

Квантили G_{α, m_1, m_2} распределения Кохрена для уровня значимости
 $\alpha = 0,05$ в зависимости от числа степеней свободы m_1 и m_2

m_1														
m_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	16	36	144	
2	0,9985	0,9750	0,9392	0,9057	0,8772	0,8534	0,8333	0,8159	0,8010	0,7880	0,7341	0,6602	0,5813	
3	0,9669	0,8709	0,7977	0,7457	0,7071	0,6771	0,6530	0,6333	0,6167	0,6025	0,5466	0,4748	0,4031	
4	0,9065	0,7679	0,6841	0,6287	0,5895	0,5598	0,5365	0,5175	0,5017	0,4884	0,4366	0,3720	0,3093	
5	0,8412	0,6838	0,5981	0,5441	0,5065	0,4783	0,4564	0,4387	0,4241	0,4118	0,3645	0,3066	0,2513	
6	0,7808	0,6161	0,5321	0,4803	0,4447	0,4184	0,3980	0,3817	0,3682	0,3568	0,3135	0,2612	0,2919	
7	0,7271	0,5612	0,4800	0,4307	0,3974	0,3726	0,3535	0,3384	0,3259	0,3154	0,2756	0,2278	0,1833	
8	0,6798	0,5157	0,4377	0,3910	0,3595	0,3362	0,3185	0,3043	0,2926	0,2829	0,2462	0,2022	0,1616	
9	0,6385	0,4775	0,4027	0,3584	0,3286	0,3067	0,2901	0,2768	0,2659	0,2568	0,2226	0,1820	0,1446	
10	0,6020	0,4450	0,3733	0,3311	0,3029	0,2823	0,2666	0,2541	0,2439	0,2355	0,2032	0,1655	0,1308	
12	0,5410	0,3924	0,3264	0,2880	0,2626	0,2439	0,2299	0,2187	0,2098	0,2020	0,1737	0,1403	0,1100	
15	0,4709	0,3346	0,2758	0,2419	0,2195	0,2034	0,1911	0,1815	0,1736	0,1671	0,1429	0,1144	0,0889	
20	0,3894	0,2705	0,2205	0,1921	0,1735	0,1602	0,1501	0,1422	0,1357	0,1303	0,1108	0,0879	0,0675	
24	0,3434	0,2354	0,1907	0,1656	0,1493	0,1374	0,1286	0,1216	0,1160	0,1113	0,0942	0,0743	0,0567	
30	0,2929	0,1980	0,1593	0,1377	0,1237	0,1137	0,1061	0,1002	0,0958	0,0921	0,0771	0,0604	0,0457	
40	0,2370	0,1576	0,1259	0,1082	0,0968	0,0887	0,0827	0,0780	0,0745	0,0713	0,0595	0,0462	0,0347	
60	0,1737	0,1131	0,0895	0,0765	0,0682	0,0623	0,0583	0,0552	0,0520	0,0497	0,0411	0,0316	0,0245	
120	0,0998	0,0632	0,0495	0,0419	0,0371	0,0337	0,0312	0,0292	0,0279	0,0266	0,0218	0,0168	0,0120	

Литература:

1. Александрова И., Основи на инженерните изследвания, Габрово, УИ В. Априлов, 2003.
2. Божанов Е., и др. Статистически методи за моделиране и оптимизиране на многофакторни обекти. Техника., С., 1977.
3. Вучков, И.В., Експериментални изследвания и идентификация, С., Техника, 1990
4. Вучков, И., Планиране и анализ на експеримента, Учебни записки, 2003
5. Спирин Н.А., Лавров В.В., Методы планирования и обработки результатов инженерного эксперимента, Екатеринбург, 2004.
6. Чакърски Д., Т. Вакарелска,. Инженерни изследвания и симулационно моделиране. Издателство на ТУ – София, 2008.
7. Метрология и измервателна техника, Справочник, Том1, под ред. Х. Радев, Софттрейд, С, 2008.
8. Болтян А.В., И.А.Горобец, Теория инженерных исследования, Донецк, 2004.
9. Веденяпин Г. В., Общая методика экспериментального исследование и обработки опытных данных. Колос., М., 1973.
10. Ящерицын П.И. Е.И. Махаринский, Планирование эксперимента в машиностроении, Высшая школа, Минск, 1985
11. <http://www.statsoft.com/textbook/experimental-design/?button=1>
12. <http://qstat.dir.bg/HELPGG/data-doe.htm>